Schriftliche Abiturprüfung 2004
Fach : Mathematik
Prüfungsart : 1./2. Prüfungsfach
Dauer : 5 Stunden
Hilfsmittel : Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner

!!! Die Aufgaben umfassen 3 Seiten !!!

Aufgabe 1

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k : D_{max} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(\frac{k \cdot x}{k - x})$ mit $k \in \mathbb{R}^+$.

1.1 Bestimmen Sie die Definitionsmenge D_{max} in Abhängigkeit von k und zeigen Sie, dass für alle $x \in D_{max}$ gilt : $f_k''(x) = \frac{k \cdot (2x - k)}{x^2 \cdot (k - x)^2}$.

1.2 Zeigen Sie, dass je zwei verschiedene Scharkurven keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

1.3 Berechnen Sie die Gleichung der Kurve, auf der alle Wendepunkte der Graphen der Schar f_k liegen.

1.4 Bestimmen Sie die Funktion der Schar, deren Graph an der Stelle 2 eine Tangente hat, die parallel zur ersten Winkelhalbierenden verläuft.

1.5 Diskutieren Sie die Funktion f_4.

1.6 Zeigen Sie, dass für alle $x \in [0; 2[$ gilt: $f_4(2+x) + f_4(2-x) = 2 \cdot f_4(2)$.
Welche geometrische Bedeutung hat diese Gleichung für den Graphen der Funktion f_4?

1.7 Begründen Sie, dass die Funktion f_4 umkehrbar ist. Geben Sie die Definitionsmenge der Umkehrfunktion an und berechnen Sie ihre Funktionsgleichung.

1.8 Der Graph der Funktion f_4, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ schließen im ersten Quadranten eine Fläche ein. Berechnen Sie die Maßzahl dieser Fläche.

2. Gegeben ist die Funktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ und ein Punkt $P(u \mid g(u))$ mit $u > 1$ auf dem Graphen der Funktion g. Die Normale an den Graphen der Funktion g im Punkt P, die Gerade mit der Gleichung $x = u$ und die x-Achse schließen ein Dreieck ein.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P so, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal wird.

Schriftliche Abiturprüfung 2004
Fach : Mathematik
Prüfungsart : 1./2. Prüfungsfach
Dauer : 5 Stunden
Hilfsmittel : Zugelassene Formelsammlung, zugelassener Taschenrechner
!!! Die Aufgaben umfassen 3 Seiten !!!

Aufgabe 2

1. Gegeben sind die Punkte A(4| 2| 5), B(6|0|6) und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.1 Berechnen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene e, die den Punkt A und die Gerade g enthält und weisen Sie nach, dass auch der Punkt B in dieser Ebene liegt.

1.2 Auf der Geraden g gibt es einen Punkt C so, dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ senkrecht aufeinander stehen. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C.
[Zur Kontrolle: C(7 |2 |8)]

1.3 Ergänzen Sie das rechtwinklige Dreieck ΔABC durch Berechnung des Punktes D zum Rechteck ABCD und zeigen Sie dann, dass dieses Rechteck sogar ein Quadrat ist.

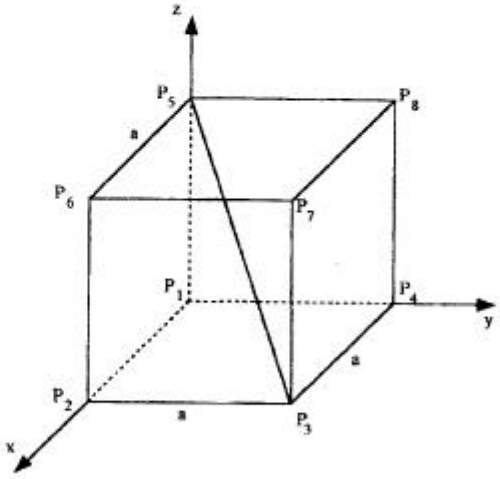
1.4 Das Quadrat ABCD ist die Grundfläche einer geraden quadratischen Pyramide, deren Spitze S in der x-z-Ebene liegt. Berechnen Sie die Koordinaten der Pyramidenspitze S und das Volumen der Pyramide ABCDS.
[Zur Kontrolle : S(1,5| 0| 10,5)]

1.5 Es gibt eine Kugel, die durch alle Eckpunkte der Pyramide ABCDS geht. Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M dieser Kugel.

2. Ein Würfel mit der Kantenlänge a ist gemäß folgender Abbildung in einem kartesischen Koordinatensystem positioniert.

2.1 Berechnen Sie das Maß des Winkels zwischen zwei Raumdiagonalen des Würfels.

2.2 Zeigen Sie: Der Abstand der Würfelecke P_2 von der Raumdiagonalen $\overline{P_5P_3}$ beträgt $\frac{1}{3}a\sqrt{6}$.



[redacted]

Untersuchen Sie, ob die beiden Fehler unabhängig voneinander auftreten.

2.3 Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig der Produktion entnommenes Ventil fehlerhaft ist, beträgt 5 %.
Beim Versand werden 40 Ventile zu einer Verpackungseinheit zusammengefasst.

2.3.1 Wie groß ist die durchschnittliche Anzahl defekter Ventile in einer Verpackungseinheit?

2.3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Ventil einer Verpackungseinheit defekt ist.