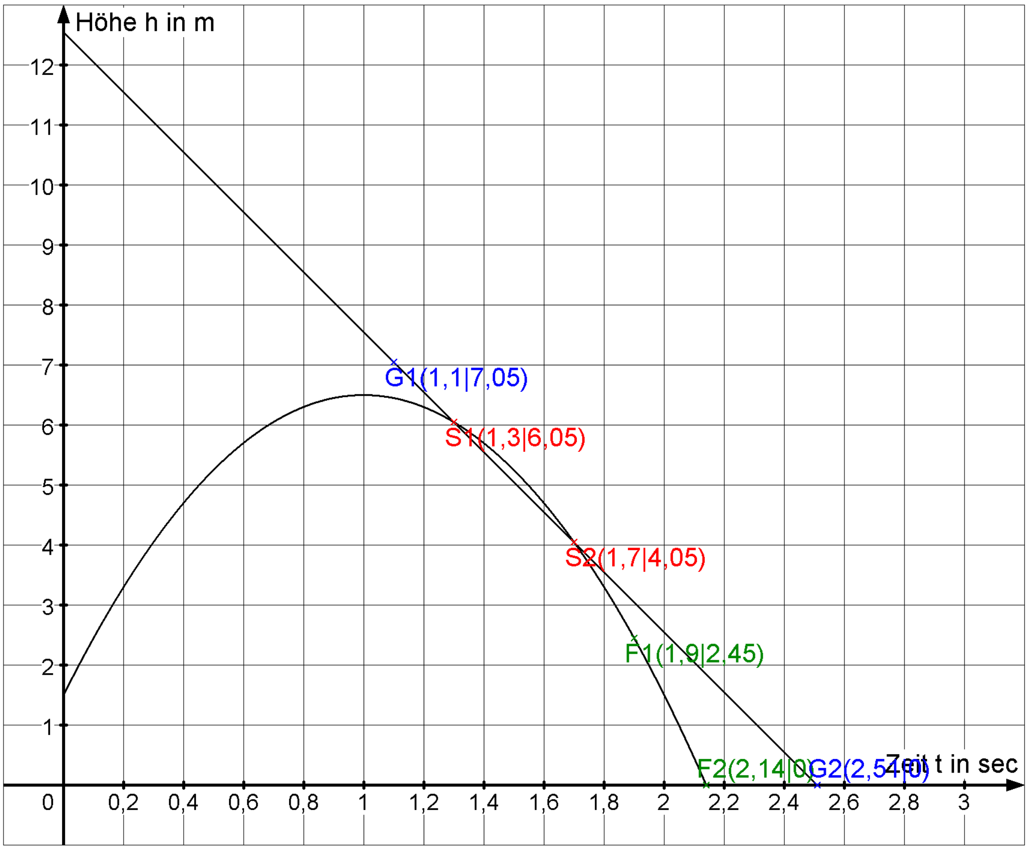
Name: **Datum:**

Quadratische Funktionen - Anwendungsaufgabe 22 - Lösung

1. a)
b)



c) Die eingezeichneten Punkte könnten auf einer nach unten geöffneten Parabel liegen.

d) Allgemeine Form eines quadratischen Terms: $h_F(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$.
Einsetzen der Koordinaten der ersten drei Wertepaare in die zugehörige Funktionsgleichung liefert das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} a \cdot 0{,}09 & +b \cdot 0{,}3 & +c = 4{,}05 \\ a \cdot 0{,}16 & +b \cdot 0{,}4 & +c = 4{,}7 \\ a \cdot 0{,}25 & +b \cdot 0{,}5 & +c = 5{,}25 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1)\,|\cdot(-1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a \cdot 0{,}09 & -b \cdot 0{,}3 & -c = -4{,}05 \\ a \cdot 0{,}07 & +b \cdot 0{,}1 & = 0{,}65 \\ a \cdot 0{,}16 & +b \cdot 0{,}2 & = 1{,}2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (4): (1)+(2)\,|\cdot(-2) \\ (5): (1)+(3) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a \cdot 0{,}09 & -b \cdot 0{,}3 & -c = -4{,}05 \\ -a \cdot 0{,}14 & -b \cdot 0{,}2 & = -1{,}3 \\ a \cdot 0{,}02 & & = -0{,}1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (4) \\ (6): (4)+(5) \end{matrix}$$

Glg. (6): $a \cdot 0{,}02 = -0{,}1 \Leftrightarrow a = -5$.

Glg. (7):(6) in (4): $-(-5) \cdot 0{,}14 - b \cdot 0{,}2 = -1{,}3 \Leftrightarrow b = 10$

Glg. (8): (7) und (6) in (1): $(-5) \cdot 0{,}09 + 10 \cdot 0{,}3 + c = 4{,}05 \Leftrightarrow c = 1{,}5$.

Der gesuchte Funktionsterm ist: $h_F(t) = -5 \cdot t^2 + 10 \cdot t + 1{,}5$.

e) Funktionsgleichung: $h = -5 \cdot t^2 + 10 \cdot t + 1{,}5$
Einsetzen von $(0{,}6 \mid 5{,}7)$ liefert: $5{,}7 = 5{,}7$ w.A.
Einsetzen von $(0{,}7 \mid 6{,}05)$ liefert: $6{,}05 = 6{,}05$ w.A.

f) siehe oben

g) Ordinatenabschnitt: $h_F(0) = 1{,}5$; 1,5m ist die Höhe des Fleischbrockens zur Zeit des Abwurfs.

h) Zu berechnen ist $h_F(1{,}9) = 2{,}45$. 1,9 sec nach dem Abwurf hat der Happen die Höhe 2,45m.

i) Gesucht sind die Nullstellen der Funktion:

$$h_F(t) = 0$$
$$\Leftrightarrow -5 \cdot (t-1)^2 + 6{,}5 = 0$$
$$\Leftrightarrow (t-1)^2 - 1{,}3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(t - 1 - \sqrt{1{,}3}\right) \cdot \left(t - 1 + \sqrt{1{,}3}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow t = 1 + \sqrt{1{,}3} \vee t = 1 - \sqrt{1{,}3}$$
$$L = \{1 - \sqrt{1{,}3}; 1 + \sqrt{1{,}3}\}$$

Lediglich die erste Lösung $1 + \sqrt{1{,}3} \approx 2{,}14$ ist im Sinne der Sachaufgabe von Relevanz, da die zweite Lösung einer negativen Zeit entspricht, was hier keinen Sinn macht. Das Fleischstück erreicht also nach etwa 2,14sec den Boden.

j) Gesucht ist der Scheitelpunkt des Graphen:
$h_F(t) = -5 \cdot t^2 + 10 \cdot t + 1{,}5 = -5 \cdot [t^2 - 2 \cdot t - 0{,}3] = -5 \cdot [(t-1)^2 - 1{,}3] = -5 \cdot (t-1)^2 + 6{,}5$.
Der Scheitelpunkt ist also $S(1 \mid 6{,}5)$; somit hat der Brocken 1sec nach dem Abwurf seine maximale Höhe von 6,5m erreicht. Der Graph liefert die gleiche Information.

2. a) siehe oben

b) Aus der Wertetabelle ist ersichtlich, dass sich in gleich großen Zeitintervallen (0,1sec) die Höhe des Vogels um jeweils gleich große Beträge (0,5m) verringert.

c) Steigungsfaktor: $v = \dfrac{10{,}55\text{m} - 11{,}05\text{m}}{0{,}4\,\text{sec} - 0{,}3\,\text{sec}} = -5\dfrac{\text{m}}{\text{sec}}$; die Höhe des Vogels sinkt pro sec um 5m.

d) Funktionsterm: $h_G(t) = -5 \cdot t + n$, mit noch zu bestimmenden Ordinatenabschnitt n. Einsetzen der Koordinaten eines beliebigen Messpaares (z.B. $(0{,}3 \mid 11{,}05)$) in die Gleichung $h_G = h_G(t)$ liefert:
$11{,}05 = -5 \cdot 0{,}3 + n \Leftrightarrow 12{,}55 = n$.
Mit Maßeinheiten ergibt sich somit der Wert 12,55m für den Ordinatenabschnitt. Dies ist die Höhe des Vogels zur Zeit des Abwurfs des Fleischbrockens.

e) Ohne Einheiten: $h_G(t) = -5 \cdot t + 12{,}55$ (t : Zeit in sec).
Mit Einheiten: $h_G(t) = -5\dfrac{\text{m}}{\text{sec}} \cdot t + 12{,}55\text{m}$ (t : Zeit).
Das Einsetzen der Messpaare in die Gleichung $h = -5 \cdot t + 12{,}55$ liefert:
$10{,}55 = 10{,}55$ w.A.; $10{,}05 = 10{,}05$ w.A.; $9{,}55 = 9{,}55$ w.A.; $9{,}05 = 9{,}05$ w.A.

f) siehe oben

g) Gesucht ist $h_G(1{,}1\text{sec}) = -5\dfrac{\text{m}}{\text{sec}} \cdot 1{,}1\text{sec} + 12{,}55\text{m} = 7{,}05\text{m}$.

h) Gesucht ist die Nullstelle der Funktion:
$h_G(t) = 0 \Leftrightarrow -5 \cdot t + 12{,}55 = 0 \Leftrightarrow t = 2{,}51$; $L = \{2{,}51\}$. Ohne Abbremsen würde der Greifvogel 2,51sec nach Abwurf des Fleischbrockens Bodenkontakt spüren.

3. a) Zu berechnen sind zuerst die Schnittstellen der Funktionen:
$h_G(t) = h_F(t)$
$\Leftrightarrow -5 \cdot t + 12{,}55 = -5 \cdot t^2 + 10 \cdot t + 1{,}5 \Leftrightarrow 0 = -5 \cdot t^2 + 15 \cdot t - 11{,}05 \Leftrightarrow 0 = t^2 - 3 \cdot t + 2{,}21$
$\Leftrightarrow 0 = [t - 1{,}5]^2 - 0{,}04 = 0 \Leftrightarrow 0 = (t - 1{,}5 - 0{,}2) \cdot (t - 1{,}5 + 0{,}2) \Leftrightarrow t = 1{,}7 \vee t = 1{,}3$; $L = \{1{,}3; 1{,}7\}$.
Daraus ergeben sich die Ordinaten Schnittpunkte:
$h_G(1{,}3) = 6{,}05$; $h_G(1{,}7) = 4{,}05$
Die Schnittpunkte sind somit $S_1(1{,}3 \mid 6{,}05)$ und $S_2(1{,}7 \mid 4{,}05)$.
1,3sec nach dem Abwurf des Fleischbrockens trifft der Greifvogel in einer Höhe von 6,05m auf eben diesen und hat – falls er es verschmäht – weitere 0,4sec später und dann in einer Höhe von 4,05m ein letztes Mal die Möglichkeit, dem Treiben ein Ende zu bereiten.

b) Weil die Fallgeschwindigkeit des Vogels sich nicht ändern soll, wird seine Bewegung weiterhin beschrieben durch einen Term der Form (Rechnung ohne Einheiten): $h_{Neu}(t) = -5 \cdot t + b$. Da der neue Graph die Parabel im Scheitelpunkt $S(1 \mid 6{,}5)$ (siehe Aufgabenteil **1.j)**) schneiden soll, muss gelten: $h_{Neu}(1) = 6{,}5 \Leftrightarrow -5 \cdot 1 + b = 6{,}5 \Leftrightarrow b = 11{,}5$; der Vogel muss zum Zeitpunkt des Abwurfs des Fleischbrockens die Höhe 11,5m haben, damit er diesen in seinem höchsten Punkt erwischt.