



Name: _____

KLAUSUR
im Kurshalbjahr 12/II

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Jetzt 6,5 Milliarden Menschen

Überalterung wird globales Problem / Massenflucht in die Metropolen

Im 20. Jahrhundert kam es zu einem dramatischen Anstieg der Weltbevölkerung: Im Jahr 1927 lebten auf der Welt rund 2 Mrd. Menschen, im Jahr 1974 bereits 4 Milliarden.

Text aus: Mindener Tageblatt, 30.12.2005

Gehen Sie davon aus, dass sich die Angaben des Textes auf den jeweiligen Jahresbeginn beziehen.

Um die weitere Entwicklung zu prognostizieren, sollen verschiedene Modelle untersucht werden. Hierbei wird die Weltbevölkerung als differenzierbare Funktion f der seit Beginn des 20. Jahrhunderts vergangenen Zeit t dargestellt. Diese Zeit werde in Jahrhunderten gemessen; also gibt z.B. $f(1,25)$ die prognostizierte Weltbevölkerung im Jahre 2025 an.

a) Zunächst geht es um das Modell des exponentiellen Wachstums.

Bestimmen Sie die Gleichung einer Exponentialfunktion f_1 , die die beiden Angaben im obigen Text erfüllt.

Vergleichen Sie den Wert Ihrer Exponentialfunktion f_1 für den Zeitpunkt 1.1.2006 mit der Aussage der oben abgedruckten Zeitungsüberschrift. (7 P)

(Der Zeitraum zwischen dem 30.12.2005 bzw. dem Tag der tatsächlichen Datenerhebung und dem 1.1.2006 bleibt unberücksichtigt.)

(Kontrollergebnis zum Weiterarbeiten: $f_1(t) = 1,343 \cdot e^{1,475 \cdot t}$)

b) Da ein unbegrenztes exponentielles Wachstum auf längere Sicht nicht realistisch ist, soll angenommen werden, dass die Weltbevölkerung nur bis Ende 2028 durch f_1 modelliert werden kann und von da an nur noch linear weiter wächst. Dabei wird die Anfang 2029 erreichte Wachstumsgeschwindigkeit zugrunde gelegt.

Beschreiben Sie das lineare Wachstum ab Anfang 2029 durch eine Funktion f_2 und ermitteln Sie auf dieser Grundlage eine Prognose für die Größe der Weltbevölkerung im Jahr 2050. (10 P)

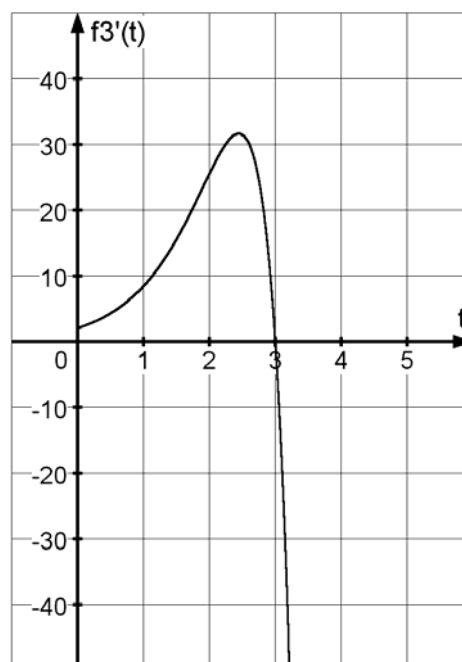
Die folgenden Modellierungen sollen berücksichtigen, dass die Weltbevölkerung nicht unbeschränkt anwachsen kann.

- c) Es soll wie in b) angenommen werden, dass die Weltbevölkerung nur bis Ende 2028 durch $f_1(t)$ modelliert werden kann und dass der Graph von diesem Zeitpunkt an einen abweichenden Verlauf nimmt.

Erklären Sie anschaulich, wie sich diese Annahmen hinsichtlich der Existenz von Extrem- und Wendepunkten auswirken, wenn man von einem insgesamt knickfreien Graphen ausgeht. (6 P)

- d) Die Funktion f_3 ist durch die Angaben $f_3(0) = 1,3$ und $f_3'(t) = 0,7 \cdot e^{1,8 \cdot t} \cdot (3 - t)$ eindeutig bestimmt (siehe nebenstehende Abbildung).

- (1) Berechnen Sie Extrem- und Wendestellen von f_3 im Bereich $t \geq 0$.
- (2) Berechnen Sie den Funktionsterm von f_3 .
- (3) Beschreiben Sie, wie sich die Weltbevölkerung nach dem durch f_3 definierten Modell entwickelt, und beurteilen Sie die Brauchbarkeit des Modells. (27 P)



Allgemeine Hinweise zur Darstellung der Lösungen:

Bei der Darstellung der Lösungen müssen für alle Teilaufgaben grundsätzlich der Lösungsansatz (je nach Aufgabenstellung die Sachaussage und/oder die mathematische Formel) notiert und die Wahl begründet werden. Darüber hinaus sind wesentliche Entscheidungen bei der Aufgabenlösung zu erläutern bzw. zu begründen und wesentliche Rechenschritte zu dokumentieren. Die ausschließliche Angabe des richtigen Rechenergebnisses einer Teilaufgabe führt nicht zu Bewertungspunkten.

zugelassene Hilfsmittel:

- wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch