

Unterlagen für die Lehrkraft

KLAUSUR
im Kurshalbjahr 12/II

Mathematik, Leistungskurs

1. **Aufgabenart**
Aufgabenstellung aus dem Bereich **Analysis**

2. **Aufgabenstellung**

siehe Aufgabenblatt für die Schülerinnen und Schüler

3. **Materialgrundlage**

./.

4. **Bezüge zu den 'Vorgaben zu den unterrichtlichen Voraussetzungen für die schriftlichen Prüfungen im Abitur in der gymnasialen Oberstufe im Jahr 2007'**

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*

- Untersuchung von Exponentialfunktionen mit Ableitungsregeln (Produktregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
- Integrationsregeln (partielle Integration)
- Flächenberechnung durch Integration

5. **Zugelassene Hilfsmittel**

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

6. **Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen**
6.1 **Allgemeine Hinweise**

Die Bewertung erfolgt anhand des folgenden Bewertungsschemas.

Als Grundlage einer kriteriengeleiteten Beurteilung werden zu erbringende Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln.

Der Kriterienkatalog sieht in der Regel die Möglichkeit vor, zusätzliche Teilleistungen des Prüflings zu berücksichtigen. Die für die Teilaufgabe zu erreichende Höchstpunktzahl kann dadurch nicht überschritten werden.

Die Anordnung der Kriterien folgt einer plausiblen logischen Abfolge von Lösungsschritten, die aber keineswegs allgemein vorausgesetzt werden kann und soll.

Die Teilleistungen werden den in den Lehrplänen definierten Anforderungsbereichen I bis III zugeordnet, die Klassen von unterschiedlich komplexen kognitiven Operationen definieren, aber noch keine eindeutige Hierarchie der Aufgabenschwierigkeiten begründen. Dazu dienen Punktwerte, die die Lösungsqualität der erwarteten Teilleistung bezogen auf den jeweiligen Anforderungsbereich gewichten. Die Punktwerte qualifizieren Schwierigkeitsgrade von Teilleistungen im Verhältnis zueinander. Die Zuordnungen zu Anforderungsbereichen und Punktwertungen sind Setzungen, die von typischen Annahmen über Voraussetzungen und Schwierigkeitsgrade der Teilleistungen ausgehen. Die in den für jede Aufgabe gesondert erstellten Bewertungsvorgaben angegebenen Punktwerte entsprechen einer maximal zu erwartenden Lösungsqualität für jede Teilaufgabe.

Inhaltliche Leistungen und Darstellungsleistungen werden in die Bewertung der inhaltlichen Teilleistungen integriert.

Die Entscheidung über eine Absenkung der Bewertung aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (§ 13 Abs. 6 APO-GOST) wird wie bisher im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen und der Darstellungsleistungen getroffen.

6.2.1 Modellösungen

Lösungsskizze	
a	<p>Möglicher Ansatz: $f_1(t) = a \cdot b^t$. Aus $a \cdot b^{0,27} = 2$ und $a \cdot b^{0,74} = 4$ folgt durch Division: $b^{0,47} = 2$, also $b = 2^{100/47} \approx 4,37$. Das kann man auch direkt aus dem Text erschließen.</p> <p>Damit ist $a = 2 \cdot b^{-0,27} \approx 1,343$, also $f_1(t) \approx 1,343 \cdot 4,37^t$</p> <p>Alternativer Ansatz: $f_1(t) = a \cdot e^{\lambda \cdot t}$. Hier folgt $e^{\lambda \cdot 0,47} = 2$, und $\lambda = \frac{\ln(2)}{0,47} \approx 1,475$, also</p> $f_1(t) \approx 1,343 \cdot e^{1,475 \cdot t}$ <p>Setzt man zum Vergleich $t = 1,06$ (Die Abweichung zwischen dem 30.12.05 bzw. dem Tag der wirklichen Datenerhebung und dem 1.1.06 bleibt unberücksichtigt), so erhält man: $f_1(1,06) \approx 6,41$. Dies weicht nur um ca. 1,4% von der Aussage der Zeitungsüberschrift ab.</p>
b	<p>Aus $f_1(1,29) \approx 9,00$ und $f_1'(1,29) \approx 13,28$ erhält man $f_2(t) = 9,00 + 13,28 \cdot (t - 1,29)$, $t \geq 1,29$, die Gleichung der Tangente an den Graphen von f_1 im Punkt $(1,29 9)$. An der Stelle $t = 1,5$ ergibt sich der Wert $f_2(1,5) = 9 + 13,28 \cdot (1,5 - 1,29) \approx 11,79$, d.h. eine Bevölkerungszahl von knapp 12 Milliarden im Jahr 2050.</p>
c	<p>Für $t < 1,29$ beschreibt der Graph eine reine Linkskurve. Eine immer weiter zunehmende Steigung ist (wie schon eine konstante Steigung) mit der Beschränktheit nicht vereinbar. Vielmehr muss die Steigung irgendwann einmal abnehmen, so dass dort eine maximale Steigung erreicht wird. Dies zeigt die Existenz (mindestens) eines Wendepunktes. Falls die Steigung nicht negativ wird, nähert sich der Graph asymptotisch einer oberen Schranke, andernfalls findet ein Vorzeichenwechsel der Ableitung statt und es gibt (mindestens) einen Hochpunkt. Der weitere Verlauf ist unbestimmt.</p>
d	<p>(1) Aus $f_3'(t_e) = 0,7 \cdot e^{1,8 \cdot t_e} \cdot (3 - t_e) = 0$ liest man sofort die Existenz eines einzig möglichen Hochpunktes bei $t_e = 3$ ab (Vorzeichenwechsel +/-).</p> <p>Aus $f_3''(t) = 0,7 \cdot e^{1,8 \cdot t} \cdot [1,8 \cdot (3 - t_w) - 1] = 0$ erhält man als einzig mögliche Wendestelle $t_w = 3 - 1/1,8 \approx 2,44$. Auch hier wechselt offenkundig das Vorzeichen.</p> <p>(2) $f_3(t) = 1,3 + \int_0^t f_3'(x) dx = 1,3 + 0,7 \int_0^t e^{1,8 \cdot x} \cdot (3 - x) dx$</p> $= 1,3 + 0,7 \left(\left[\frac{e^{1,8 \cdot x}}{1,8} \cdot (3 - x) \right]_0^t + \int_0^t \frac{e^{1,8 \cdot x}}{1,8} dx \right) = 1,3 + \frac{0,7 \cdot e^{1,8 \cdot t} \cdot (3 - t)}{1,8} - \frac{3 \cdot 0,7}{1,8} + 0,7 \cdot \left[\frac{e^{1,8 \cdot x}}{1,8^2} \right]_0^t$ $= 1,3 + \frac{2,1e^{1,8t} - 0,7e^{1,8t} \cdot t}{1,8} - \frac{2,1}{1,8} + 0,7 \cdot \frac{e^{1,8t} - 1}{1,8^2} = \frac{e^{1,8t} (4,48 - 1,26t) - 0,268}{1,8^2}$ <p>Hier werden der Hauptsatz und das Verfahren der partiellen Integration angewandt.</p> <p>(3) Die Weltbevölkerung nimmt nach dem vorliegenden Modell von 1,3 Mrd. im Jahr 1900 über 2,0 Mrd. im Jahr 1927, 4,1 Mrd. im Jahr 1974, 6,46 Mrd. im Jahr 2006, 8,9 Mrd. im Jahr 2029 und 11,81 Mrd. im Jahr 2050 auf 47,8 Mrd. im Jahr 2200 zu. Nach diesem Maximum nimmt sie vergleichsweise schnell wieder ab. Diese Abnahme geschieht zeitlich unbegrenzt, sogar mit wachsender Geschwindigkeit, da der Graph von f_3 von $t = t_w$ an rechtsgekrümmt ist (s.o.). Dadurch schneidet er für ein t_0 (mit $3 < t_0 < 4$) die t-Achse und verläuft von da an im IV. Quadranten. Dies entspricht einer negativen Weltbevölkerung und ist nicht sinnvoll. Zwischen 1900 und 2006 ist eine gute Übereinstimmung mit der Wirklichkeit, bis 2050 gute Übereinstimmung mit dem durch f_2 gegebenen Wachstumsmodell vorhanden.</p>

Name: _____ Kursbezeichnung: _____

6.2.2 Teilleistungen – Kriterien**Teilaufgabe a)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
		max. (AFB)	EK	ZK	DK
1	bestimmt eine geeignete Exponentialfunktion mit den geforderten Eigenschaften.	5 (I)			
2	vergleicht das ermittelte Ergebnis mit den Aussagen der Zeitungsüberschrift.	2 (I)			
3	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.				
Summe Teilaufgabe a)		7			

Teilaufgabe b)

1	ermittelt die Gleichung von f_2 , d.h. der Tangente an den Graphen von f_1 im Punkt $(1,29 f_1(1,29))$.	7 (I)			
2	bestimmt mit Hilfe der Tangentengleichung für das Jahr 2050 eine Prognose für die Größe der Weltbevölkerung.	3 (I)			
3	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.				
Summe Teilaufgabe b)		10			

Teilaufgabe c)

1	erklärt anschaulich die Auswirkungen der Annahmen auf die Existenz von Extrem- und Wendepunkten.	6 (III)			
2	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.				
Summe Teilaufgabe c)		6			

Teilaufgabe d)

1	(1) berechnet die Extrem- und Wendestellen von f_3 .	8 (II)			
2.	(2) berechnet mit Hilfe des Hauptsatzes und des Verfahrens der partiellen Integration den Funktionsterm von f_3 .	10 (II)			
3	(3) beschreibt, wie sich die Weltbevölkerung nach dem durch f_3 definierten Modell entwickelt.	6 (II)			
4	(3) beurteilt die Brauchbarkeit des durch f_3 definierten Modells.	3 (III)			
5	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.				
Summe Teilaufgabe d)		27			

		max. (AFB)	EK	ZK	DK
	Summe insgesamt:	50			

Die Klausur wird mit der Note: _____ bewertet.

Unterschrift(en) der Korrektoren:

Datum: