Unterlagen für die Lehrkraft

KLAUSUR
im Kurshalbjahr 12/II

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart
Aufgabenstellung aus dem Bereich **Lineare Algebra/Analytische Geometrie**

2. Aufgabenstellung

siehe Aufgabenblatt für die Schülerinnen und Schüler

3. Materialgrundlage

./.

4. Bezüge zu den 'Vorgaben zu den unterrichtlichen Voraussetzungen für die schriftlichen Prüfungen im Abitur in der gymnasialen Oberstufe im Jahr 2007'

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Parameterform von Geraden- und Ebenengleichungen
   - Standardskalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren
   - Normalenformen von Ebenengleichungen, Lagebeziehung von Ebene und Gerade
   - Abstandsprobleme (Abstand Punkt-Ebene)

5. Zugelassene Hilfsmittel

- wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen
6.1 Allgemeine Hinweise

Die Bewertung erfolgt anhand des folgenden Bewertungsschemas.

Als Grundlage einer kriteriengeleiteten Beurteilung werden zu erbringende Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln.

Der Kriterienkatalog sieht in der Regel die Möglichkeit vor, zusätzliche Teilleistungen des Prüflings zu berücksichtigen. Die für die Teilaufgabe zu erreichende Höchstpunktzahl kann dadurch nicht überschritten werden.
Die Anordnung der Kriterien folgt einer plausiblen logischen Abfolge von Lösungsschritten, die aber keineswegs allgemein vorausgesetzt werden kann und soll.

Die Teilleistungen werden den in den Lehrplänen definierten Anforderungsbereichen I bis III zugeordnet, die Klassen von unterschiedlich komplexen kognitiven Operationen definieren, aber noch keine eindeutige Hierarchie der Aufgabenschwierigkeiten begründen. Dazu dienen Punktwerte, die die Lösungsqualität der erwarteten Teilleistung bezogen auf den jeweiligen Anforderungsbereich gewichten. Die Punktwerte qualifizieren Schwierigkeitsgrade von Teilleistungen im Verhältnis zueinander. Die Zuordnungen zu Anforderungsbereichen und Punktwertungen sind Setzungen, die von typischen Annahmen über Voraussetzungen und Schwierigkeitsgrade der Teilleistungen ausgehen. Die in den für jede Aufgabe gesondert erstellten Bewertungsvorgaben angegebenen Punktwerte entsprechen einer maximal zu erwartenden Lösungsqualität für jede Teilaufgabe.

Inhaltliche Leistungen und Darstellungsleistungen werden in die Bewertung der inhaltlichen Teilleistungen integriert.
Die Entscheidung über eine Absenkung der Bewertung aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (§ 13 Abs. 6 APO-GOSt) wird wie bisher im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen und der Darstellungsleistungen getroffen.

6.2.1 Modelllösungen

	Lösungsskizze
a	Mögliche abgelesene Punkte: $R(4\mid 0\mid 2)$, $S(4\mid 2\mid 0)$ und $T(2\mid 4\mid 0)$ Parameterform: $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$. Normalenform: Mit $\vec{n}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ist $E:\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}=6$.
b	Bei Ausnutzung der Orthogonalitätsbeziehung ergibt sich $d=2\sqrt{3}$ $\cos(\alpha)=\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\Rightarrow\quad\alpha\approx 54{,}7°$
c	Die zu *Bild 2* gehörige Ebene liegt parallel zur x_1-x_2-Ebene und geht durch den Punkt $(0\mid 0\mid 2)$. Ihre Gleichung ist daher $E_0:\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=2$. Also $r=0$. Der Punkt $(4\mid 0\mid 3)$ gehört zur grau unterlegten Ebene im Bild 3, aber wegen $\begin{pmatrix}r\\r\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}=4r+3\neq 4r+2$ zu keiner der Ebenen E_r.
d	Abgelesene Eckpunkte: $K(0\mid 0\mid 4)$, $L(4\mid 0\mid 3)$, $M(4\mid 4\mid 2)$ und $N(0\mid 4\mid 3)$ Die Diagonalen sind unterschiedlich lang: $\lvert\overrightarrow{KM}\rvert=\left\lvert\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}\right\rvert>\left\lvert\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}\right\rvert=\lvert\overrightarrow{LN}\rvert$ bzw. die Seitenvektoren nicht orthogonal: $\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{LM}=\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}\neq 0$. Das Viereck ist kein Quadrat [, sondern eine Raute].
e	Einsetzen von $\vec{x}=t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ in die Gleichung der Ebenenschar E_r ergibt: $t(2r+1)=4r+2$ <u>1. Fall</u> $r=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ g_{AG}\subset E_{-\frac{1}{2}}$ <u>2. Fall</u> $r\neq-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ t=2$, d.h., alle Ebenen der Ebenenschar E_r schneiden die Raumdiagonale in $S(2\mid 2\mid 2)$
f	Das Volumen des ganzen Würfels beträgt $V_W=64\,[VE]$. Durch die Ebene $x_3=2$ wird der Würfel in zwei gleich große Quader zerlegt. Die grau unterlegte Fläche halbiert aus Symmetriegründen den oberen Quader. Daraus ergibt sich für das gesuchte Volumen $V=\frac{3}{4}\cdot 64=48\,[VE]$.

Name: ____________________ Kursbezeichnung: ____________

6.2.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Die Schülerin/Der Schüler	**max. (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt eine Parameterform der Ebene.	5 (I)			
2	berechnet eine Normalenform der Ebene.	4 (I)			
3	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.				
	Summe Teilaufgabe a)	**9**			

Teilaufgabe b)

1	berechnet den Abstand der Ebene vom Ursprung.	5 (I)			
2	ermittelt das Maß des eingeschlossenen Winkels.	5 (I)			
3	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.				
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

Teilaufgabe c)

1	prüft, ob die Ebene, in der die grau unterlegte Fläche liegt (Bild 2), zur Ebenenschar gehört.	5 (II)			
2	prüft, ob die Ebene, in der die grau unterlegte Fläche liegt (Bild 3), zur Ebenenschar gehört.	5 (II)			
3	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.				
	Summe Teilaufgabe c)	**10**			

Teilaufgabe d)

1	entscheidet, ob das Viereck ein Quadrat ist, durch Bestimmen der Diagonalenlänge oder Prüfen auf Orthogonalität.	5 (II)			
2	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.				
	Summe Teilaufgabe d)	**5**			

Teilaufgabe e)

1	untersucht die Lagebeziehung der Raumdiagonalen zur Ebenenschar durch Einsetzen in die Normalenform der Ebenenschar.	6 (II)			
2	interpretiert das Ergebnis des Gleichungssystems mit Hilfe einer Fallunterscheidung.	5 (III)			
3	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.				
	Summe Teilaufgabe e)	**11**			

Teilaufgabe f)

	Die Schülerin/der Schüler	max. (AFB)	EK	ZK	DK
1	ermittelt das Volumen.	5 (II)			
2	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.				
	Summe Teilaufgabe f)	**5**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Klausur wird mit der Note: ________________________________ bewertet.

Unterschrift(en) der Korrektoren:
Datum: