Vergleichsarbeit Analysis Stufe 11

im 2. Halbjahr des Schuljahres 1999/2000

Lösung

Allgemeine Vorbemerkung:

Die Darstellung der algebraischen Umformungen ist an mehreren Stellen sehr gedrängt, um Kopierkosten zu sparen. Aus demselben Grund sind die Zeichnungen zu den Aufgaben zusammengefasst.

Aufgabe 1:

a. $f'(x) = 2ax + b$.
   Es gilt:
   $f(3) = 3 \wedge f'(3) = -2 \Leftrightarrow 9a + 3b = 3 \wedge 6a + b = -2 \Leftrightarrow 3a + b = 1 \wedge 6a + b = -2$
   $\Leftrightarrow 3a = -3 \wedge 6a + b = -2 \Leftrightarrow a = -1 \wedge -6 + b = -2 \Leftrightarrow a = -1 \wedge b = 4$
   Die gesuchte Funktion f ist also gegeben durch $f(x) = -x^2 + 4x$.
b. Es gilt $f'(x) = -2x + 4$. Es ist allgemein $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, also ergibt sich hier: $t(x) = 2(x-1) + 3 = 2x + 1$. Für den Steigungswinkel α der Tangente gilt:
   $\tan(\alpha) = f'(1) = 2$, also $\alpha = 63{,}4349..°$.
c. Die gesuchte Normale n hat die Steigung -0,5. Sie verläuft durch (1; 3).
   Also gilt: $n(x) = -0{,}5(x-1) + 3 = -0{,}5x + 3{,}5$. Geforderte Zeichnung siehe unten.
d. Das Dreieck hat einen Inhalt von $0{,}5 \bullet (3{,}5-1) \bullet 1$ FE = 1,25 FE.
e. Ein notwendiges Kriterium für das Vorliegen einer Wendestelle von g an einer Stelle x_w ist: $g''(x_w)=0$.
   Rechnung: $g''(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
   Allenfalls bei x = 2 kann also eine Wendestelle vorliegen.

   Ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen einer Wendestelle von g an einer Stelle x_w ist: $g''(x_w) = 0 \wedge g'''(x_w) \neq 0$. Rechnung: $g'''(2) = f''(2) = -2 < 0$
   x= 2 ist also die einzige Wendestelle von g. (Selbstverständlich kann hier auch mit dem Scheitelpunkt der Parabel f argumentiert werden.)

Aufgabe 2:

a. Skizze siehe unten
b. Der gesuchte Bereich ist der zwischen den Nullstellen von f. Es gilt:
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 24x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(-x+12) = 0 \Leftrightarrow x=0$ oder $-x + 12 = 0$.
   Der gesuchte Bereich ist das abgeschlossene Intervall [0; 12].
c. Ein notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Extremums an einer Stelle x_E ist: $f'(x_E) = 0$.
   Rechnung:
   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 48x = 0 \Leftrightarrow -6x(x-8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$

Ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Extremums an einer Stelle x_E ist: $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$.
Rechnung: $f''(x) = -12x + 48 \Rightarrow f'''(8) = -48 < 0$
An der Stelle $x_E = 8$ liegt ein lokales Maximum vom Wert $f(8) = 512$ vor.

Da die Funktion f an den Rändern des Intervalls [0; 12] jeweils den Funktionswert 0 hat, handelt es sich bezogen auf diesen Bereich um ein <u>absolutes</u> Maximum.

d. Die mittlere Änderungsrate von f über einem Intervall $[a; b] \subseteq [0; 12]$, also der Term $(f(b)-f(a)) / (b-a)$, beschreibt in diesem Zusammenhang die Durchschnittsgeschwindigkeit, mit der die Wassermenge in der Zeit von a bis b zunimmt / abnimmt.
Die lokale Änderungsrate , also der Wert $f'(x_0)$, beschreibt hier die Momentangeschwindigkeit, mit der die Wassermenge zum Zeitpunkt x_0 zunimmt / abnimmt.

e. Ein notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines Wendepunktes an einer Stelle x_W ist: $f''(x_W) = 0$.
Rechnung:
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -12x+48 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines Wendepunktes an einer Stelle x_W ist: $f''(x_W) = 0 \wedge f'''(x_W) \neq 0$.
Rechnung: $f'''(x) = -12 \Rightarrow f'''(4) = -12 \neq 0$
An der Stelle $x_W = 4$ liegt ein Wendepunkt vor.

Es handelt sich um den Punkt $(4; f(4)) = (4; 256)$

f. Die Wendestelle ist in diesem Zusammenhang derjenige Zeitpunkt, an welchem die Wassermenge im Pumpspeicherwerk mit der größten Geschwindigkeit zunimmt / abnimmt.

<u>Aufgabe 3:</u>

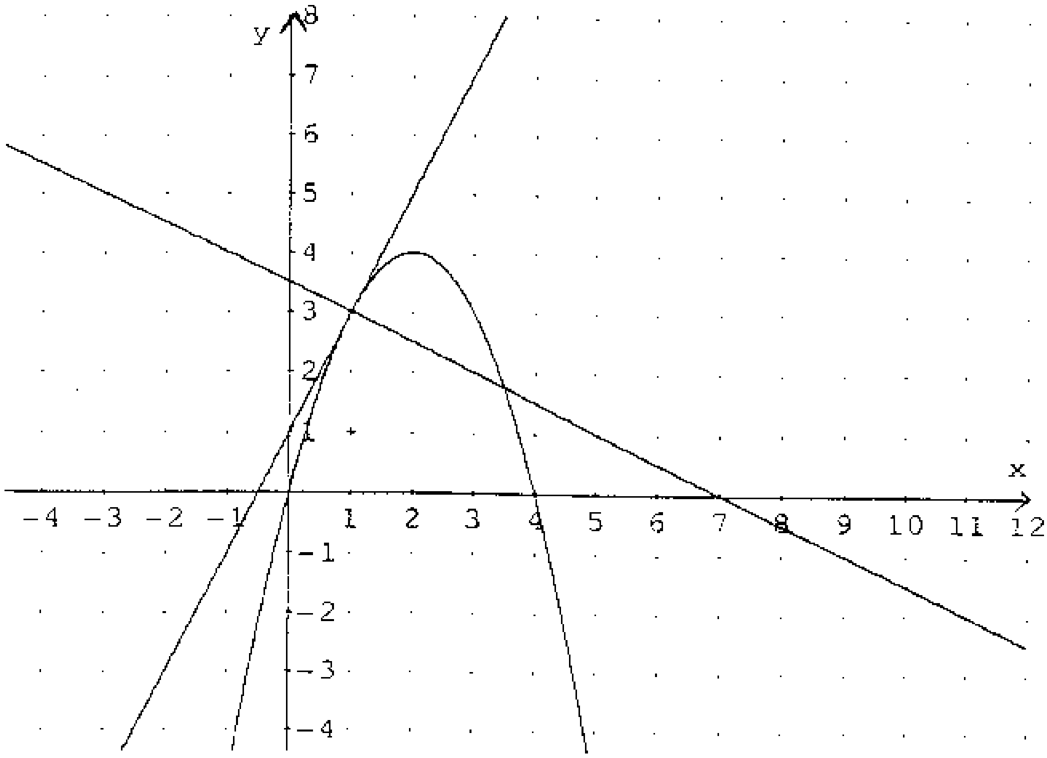
a. Unter der Tangente an den Graphen einer in x_0 differenzierbaren Funktion f an der Stelle x_0 versteht man die Gerade, die durch den Punkt $(x_0; f(x_0))$ verläuft und die Steigung $f'(x_0)$ hat.

b. $f(x)= x^3 - x^2 + 2 \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 2x$
Die Tangentengleichung ist: $t(x) = f'(3)(x - 3) + 20 = 21x - 43$
Berechnung der gemeinsamen Punkte von Funktionsgraph und Tangente:
$f(x) = t(x) \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2 = 21x - 43 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 21x + 45 = 0$
$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+2x-15) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-3)(x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -5$
Die gemeinsamen Punkte sind der Berührpunkt (3;20) sowie der Punkt (-5; -148).

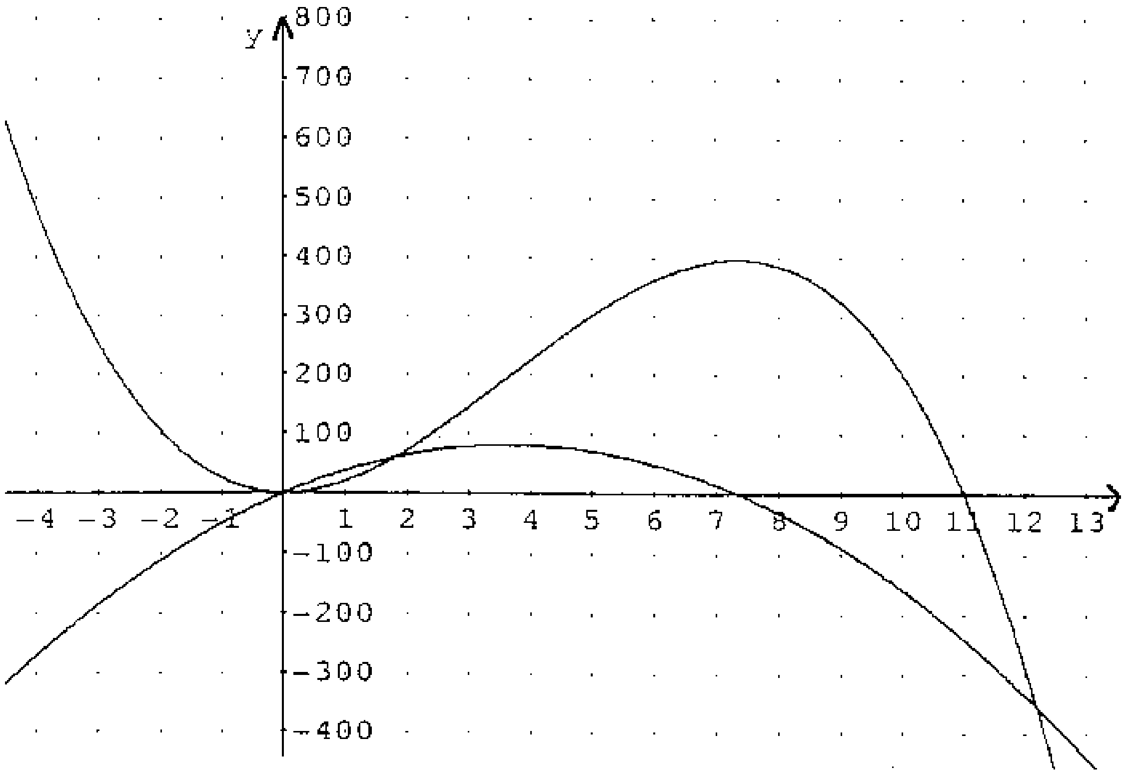
c. $f(x) = ax^2 \Rightarrow f''(x) = 2ax$
Die Tangentengleichung für die Stelle 2 ist $t(x) = 4a(x - 2) + 4a = 4ax - 4a$.
Es ist $f(x) = t(x) \Leftrightarrow ax^2 - 4ax - 4a = 0 \Leftrightarrow a(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (da $a \neq 0$)

d. Es ist $P = (p;p^2)$.
Es ist also $Q=(0;p^2)$. Dann hat nach Konstruktion der Punkt R die Koordinaten $(0;-p^2)$.
Die Tangente an den Graphen von f in P hat die Gleichung
$t(x) = 2p(x - p) + p^2 = 2px - 2p^2 + p^2 = 2px - p^2$.
Ihr Schnittpunkt mit der y-Achse ist offenbar der Punkt R. Zeichnung hierzu siehe unten.

Zeichnung zur Aufgabe 1c):



Zeichnung zur Aufgabe 2a):



Zeichnung zur Aufgabe 3d):