

### Voraussetzungen:

1. Bestimmung eines einfachen Funktionsterms aus einer vorgegebenen Bedingung
2. Linearfaktorzerlegung und Diskussion ganzrationaler Funktionen
3. Tangente und Normale
4. Kreis- und Geradengleichung, Orthogonalität von Geraden, Abstand zweier Punkte in der Ebene, auch Formel
5. Interpretation von Funktionen und markanter Punkte im Funktionsgraphen in Sachzusammenhängen
6. Anwendung unterschiedlicher Lösungsstrategien zur Bearbeitung von Sachproblemen ( graphische Verfahren, numerische Näherungsverfahren)

### Punkteverteilung:

#### Aufgaben 1 und 2 (18 und 20)

1a	1b	1c	2a	2b	2c	2d
5	6	7	2	6	6	5

#### Aufgabe 3 (insgesamt 20)

3a	3b	3c	3d
4	4	4	8

#### Aufgabe 4 (insgesamt 20)

4b	4b	4c	4d	4e
5	2	2	4	7

#### Aufgabe 5 (insgesamt 35 )

5a	5b	5c	5d	5e
7	7	7	7	7

Insgesamt kann man also bei der 5. Aufgabe maximal 35 Punkte erhalten. **Tragen Sie bitte diese Punktzahl in die Auswertungsliste ein.**

Die erreichte Gesamtpunktzahl wird bei der Gesamtauswertung in der Bezirksregierung durch Multiplikation mit dem Faktor 20/35 und anschließender Rundung an die anderen Alternativen (Geometrie- Statistik) angepasst.

Für eine angemessene Gewichtung dieser Aufgabe im Rahmen der Klausur Ihrer Lerngruppe werden Sie ggf. andere Punkte festlegen.

### Hilfsmittel

Schreib- und Zeichenmaterial, wissenschaftlicher Taschenrechner

# Lösungen und Punktevergabe

## Einführende Bemerkungen:

### Aufgabe 1

Es handelt sich um eine Standardaufgabe ohne größere numerische Schwierigkeiten. Auf die Angabe eines Zwischenergebnisses wurde bewusst verzichtet. Ein falsches Ergebnis in a) lässt immer noch eine sinnvolle Bearbeitung von b) zu. Außerdem ermöglicht die Information  $W(0/4)$  in b) eine kritische Überprüfung des Ergebnisses aus a). Die Zeichnung in b) hat lediglich das Ziel, die Aufgabenstellung in c) zu verdeutlichen. Eine Bestimmung der Tangenten- oder Normalengleichung ist hier nicht erforderlich.

### Aufgabe 2

Der Kontext der 2. Aufgabe ist so gewählt worden, dass unterschiedliche, kontextbezogene Einstiege in die Differentialrechnung wie z. B. über Weg-Zeit- Funktionen oder Kosten-Gewinnfunktionen keinen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad dieser Aufgabe haben. Die Modellbildung ist stark vereinfacht, problematisch ist z. B. auch die Interpretation am Rand des Definitionsbereichs. Die Aufgabenstellung in d) ist bewusst offen gehalten, lediglich die Formulierung „näherungsweise“ soll die Schüler darauf hinweisen, dass keine exakte – für sie nicht mögliche – numerische Bearbeitung der Aufgabe verlangt wird. Es sind deshalb für diesen Aufgabenteil verschiedene Lösungen auf unterschiedlichem Niveau möglich. Bei der Punktevergabe sollte aber auf eine sprachlich angemessene Formulierung des Lösungswegs geachtet werden.

### Aufgabe 3

s. Lösung

### Aufgabe 4

s. Lösung

### Aufgabe 5

## Zum Multiple-Choice-Verfahren

Mit der Aufgabenstellung nach dem Multiple-Choice-Verfahren verfolgt die Kommission, die die anonyme Vergleichsklausur entwickelt hat, das Ziel, den Zeitaufwand von Korrekturen zu begrenzen ohne die notwendige Diagnosewirkung (und die sich möglicherweise daran anschließende Fördermaßnahme) einzuschränken. Da wesentliche Aspekte fachlicher Fähigkeiten über Aufgaben im Multiple-Choice-Format nicht überprüft werden können, werden solche Aufgabenformate im allgemeinen nur einen Teil einer Klausur ausmachen können.

Die Aufgabenkommission würde sich über Anregungen und kritische Rückmeldungen zu diesem Aufgabenformat freuen. Ihre Überlegungen werden bei der folgenden Adresse gesammelt:

per mail: [Helmut Achilles, Feldstraße 15, 49477 Ibbenbüren oder  
achilles@t-online.de.](mailto:achilles@t-online.de)

Aufgaben im Multiple-Choice-Verfahren sind für die Schülerinnen und Schüler ungewohnt. Deshalb sollten sie einige Hinweise zum sinnvollen Umgang mit dieser Aufgabe erhalten:

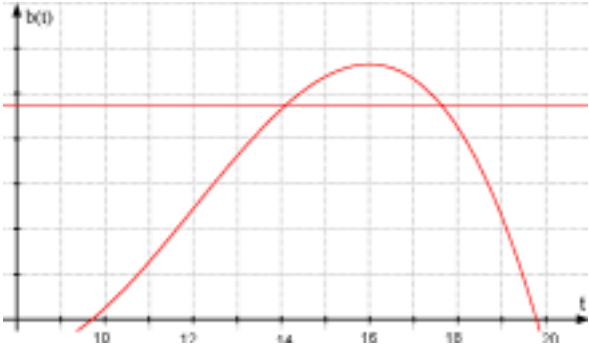
- die Kurzanweisung genau beachten (mindestens ein Kreuz, höchstens 4 Kreuze)
- alle Alternativen **gründlich durchdenken**, ggf. zunächst ausführliche Nebenrechnungen durchführen oder Skizzen anfertigen
- möglichst erst ankreuzen, wenn die Entscheidung für oder gegen alle Antworten sicher gefallen ist
- evtl. nachträgliche Korrekturen eindeutig anbringen.

Weiteres s. Lösung

### Aufgabe 1

<p><b>a)</b></p>	<p>Da <math>x_0 = -2</math> eine Nullstelle sein soll, folgt: <math>f(-2) = 0</math>, also  <math>2 - 6 + t = 0 \Leftrightarrow t = 4</math>, somit  <math>f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x + 4</math>. Notwendige und hinreichende Bedingung für Nullstellen ist <math>f(x) = 0</math>. Da <math>x_0 = -2</math> als Nullstelle bekannt ist, wird eine Polynomdivision durch den Linearfaktor <math>(x + 2)</math> durchgeführt. Die weiteren Nullstellen ergeben sich dann aus  <math>-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0</math>  <math>\Leftrightarrow (x + 2)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4</math>. Die Nullstellen lauten also: <math>x_{N_1} = -2</math> (doppeltzählend) und <math>x_{N_2} = 4</math> (einfach).</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math display="block">\begin{array}{r} (-\frac{1}{4}x^3 + 3x + 4) : (x + 2) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \\ -(-\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2) \\ \hline \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4 \\ -(\frac{1}{2}x^2 + x) \\ \hline 2x + 4 \\ -(2x + 4) \\ \hline 0 \end{array}</math> </div>	<p><b>5</b></p>
<p><b>b)</b></p>	<p>Ableitungen: <math>f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3</math>, <math>f''(x) = -\frac{3}{2}x</math>, <math>f'''(x) = -\frac{3}{2}</math>. Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle ist <math>f'(x) = 0</math>.  <math>f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2</math>. <math>x_{E_1} = 2, x_{E_2} = -2</math> sind möglicherweise Extremstellen. Die hinreichende Bedingung für eine Extremstelle ist <math>f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0</math>. Es ist <math>f''(x_{E_1}) = -3 &lt; 0</math> und <math>f''(x_{E_2}) = 3 &gt; 0</math>. Daher liegt bei <math>x_{E_1} = 2</math> ein lokales Maximum und <math>x_{E_2} = -2</math> ein lokales Minimum. <math>W(0/4)</math> ist ein Wendepunkt, wie man sofort erkennt.</p>	<p><b>6</b></p>	
<p><b>c)</b></p>	<p>Aus dem Ansatz <math>g : y = mx + b</math> folgt sofort <math>b=t</math>, da <math>W(0/t)</math> auf der Tangente liegt. Die Ableitung ergibt sich aus <math>m = f'(0) = 3</math>. Die Tangentengleichung lautet also <math>g : y = 3x + t</math>. Entsprechend wird die Gleichung der Normalen bestimmt. Die Steigung der Normalen <math>n : y = m_n x + b_n</math> erhält man aus: <math>m_n = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{3}</math>.          Da <math>W(0/t)</math> auch auf der Normalen liegt, folgt <math>b_n = t</math>, also <math>n : y = -\frac{1}{3}x + t</math>. Die Schnittpunkte der Tangente und der Normalen ergeben sich aus <math>g(x) = 0</math> und <math>n(x) = 0</math>. Man erhält für den Schnittpunkt A der Tangente <math>g</math> mit der x-Achse den Punkt <math>A(-\frac{t}{3}/0)</math> und für den Schnittpunkt der Normalen <math>n</math> mit der x-Achse den Punkt <math>B(3t/0)</math>. Die Fläche des Dreiecks ermittelt man mit der Formel: <math>A_D = \frac{gh}{2}</math>, wobei hier wegen <math>t &gt; 0</math> gilt: <math>g = x_B - x_A = 3t - (-\frac{t}{3}) = 3t + \frac{t}{3} = \frac{10}{3}t</math> und <math>h = y_W = t</math>.          Es folgt: <math>A_D = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3}t \cdot t = \frac{5}{3}t^2</math>. Aus <math>A_D = 15</math> ergibt sich <math>\frac{5}{3}t^2 = 15 \Leftrightarrow t = 3</math>, da <math>t &gt; 0</math> ist.          Für <math>t=3</math> ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABW 15 Flächeneinheiten groß.</p>	<p><b>7</b></p>	

## Aufgabe 2

a)	Gesucht ist $b(11)$ . Es ist $b(11) = -0,05 \cdot 11^3 + 1,8 \cdot 11^2 - 19,2 \cdot 11 + 62,5 = 2,55$ . Damit sind 2550 Besucher gegen 11 Uhr im Park.	2
b)	Gesucht ist das lokale Maximum der Funktion $b$ . Es ist $b'(t) = -0,15t^2 + 3,6t - 19,2$ . Aus $b'(t) = 0$ (notwendige Bedingung) folgt: $-0,15t^2 + 3,6t - 19,2 = 0 \Leftrightarrow t = 16 \vee t = 8$ , wobei $t = 8$ nicht im Definitionsbereich von $b$ liegt. Es ist $b''(t) = -0,3t + 3,6$ . Weil $b''(16) = -1,2 < 0$ und $b'(16) = 0$ , liegt bei $t = 16$ tatsächlich eine lokales Maximum vor. Es ist $b(16) = 11,3$ , damit ist um 16.00 Uhr die größte Anzahl der Besucher im Park, nämlich 11300.	6
c)	Der Andrang an den Kassen ist dann am größten, wenn das Wachstum der Besucherfunktion und damit ihre Steigung ein lokales Maximum hat. Damit muss $b'(t)$ maximal sein, also ist die Wendestelle der Funktion $b$ gesucht. Aus $b''(t) = 0$ (notwendige Bedingung) folgt: $t=12$ . Weil zusätzlich $b'''(t) = -0,3 \neq 0$ für alle $t$ , ist $t = 12$ tatsächlich Maximumstelle von $b'$ , also Wendestelle von $b$ . Hieraus ergibt sich, dass um 12.00 Uhr der Andrang an den Kassen am größten ist.	6
d)	<p>Hier geht es um die Frage, in welchem Zeitraum 9500 Personen oder mehr im Park sind. Für die Funktion bedeutet dies, dass man untersuchen muss, in welchem Intervall <math>b(t) \geq 9,5</math> ist bzw. <math>b(t) = 9,5</math>. Dies führt zu der Gleichung:</p> $-0,05t^3 + 1,8t^2 - 19,2t + 62,5 = 9,5$ $\Leftrightarrow -0,05t^3 + 1,8t^2 - 19,2t + 53 = 0,$ <p>die numerisch oder graphisch gelöst werden kann. Aus der Zeichnung liest man ab:  <math>t \approx 14,1 \vee t \approx 17,6</math>. Damit muss zwischen ca. 14.06 Uhr und 17.36 Uhr zusätzliches Personal bereit gestellt werden. Man wird etwa die Zeit zwischen 14.00 Uhr und 17.30 Uhr nehmen.</p> <p>Denkbar sind folgende Lösungsvorschläge:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Einzeichnen der Parallelen zur x- Achse im geeigneten Abstand; Kennzeichnung des entsprechenden Zeitintervalls; Abschätzung aufgrund der Zeichnung ergibt einen Zeitraum von etwa 14 Uhr bis 17.30 Uhr.</li> <li>• Systematisches Probieren ausgehend von dem bekannten Wert für <math>t=16</math> und / oder Zuhilfenahme der Zeichnung .</li> </ul>	 5

## Aufgabe 3 (Koordinatengeometrie)

a)	Für den Mittelpunkt $M$ ist $x_M = \frac{1}{2} \cdot (3-9)$ und $y_M = \frac{1}{2} \cdot (1-3)$ , also $M(-3/-1)$ . Außerdem ist $r^2 = (3+3)^2 + (1+1)^2 = 40$ . Die Kreisgleichung lautet also: $k: (x+3)^2 + (y+1)^2 = 40$ (Das Erstellen einer Zeichnung und das Ablesen von Mittelpunkt und Radius sollte hier bei Abzug eines Punktes als Lösung akzeptiert werden.).	4
b)	Die Mittelsenkrechte verläuft durch $M(-3/-1)$ und senkrecht zur Strecke $\overline{AB}$ . Strecke $\overline{AB}$ hat die Steigung $\frac{-3-1}{-9-3} = \frac{1}{3}$ , die Mittelsenkrechte also die Steigung	2

	-3 . Es folgt dann $m : y = -3x + n$ und durch Einsetzen der Koordinaten von M ergibt sich $n = -10$ und damit schließlich $m : y = -3x - 10$ als Gleichung der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$ . (Auch hier sollte das Ablesen der Gleichung aus einer Zeichnung akzeptiert werden.)	2
c)	Ansatz (1) beschreibt den gleichen Abstand eines Punktes (x/y) von den Punkten A und B; alle diese Punkte liegen aber auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$ .	4
d)	Ansatz (2) beschreibt einen Punkt (x/y), dessen Entfernung von B dreimal so groß ist wie von A. Quadrieren und Zusammenfassen von Ansatz (2) liefert $9 \cdot (x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1) = x^2 + 18x + 81 + y^2 + 6y + 9$ und damit $x^2 - 9x + y^2 - 3y = 0$ . Quadratische Ergänzung liefert nun	3
	$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{2}$ und daraus folgt die Behauptung.	3
		2

#### Aufgabe 4 (Statistik)

a)	Auf eine Angabe konkreter Zahlenwerte wird in diesem Aufgabenteil verzichtet, da sich die Ergebnisse von Schüler zu Schüler unterscheiden können. Zeichnen der Ausgleichsgeraden (Es muss erkennbar sein, dass Punkte unter- <b>und</b> oberhalb der gezeichneten Geraden liegen.) Ermittlung der Steigung aus der Zeichnung, Berechnung des y-Achsenabschnitts oder Verlängerung der y-Achse und Ablesen des y-Achsenabschnitts aus der Zeichnung	1
		2
		2
b)	x-Koordinate des Schwerpunkts: $x_s = \bar{x} = \frac{3+5+6+8}{4} = 5,5$	1
	y-Koordinate des Schwerpunkts: $y_s = \bar{y} = \frac{310+200+150+90}{4} = 187,5$	1
c)	Einsetzen von 5,5 in die Gleichung der Geradenschar liefert $y = m \cdot 5,5 - 5,5m + 187,5 = 187,5$ , der Punkt (5,5 / 187,5) liegt also auf allen Geraden der Schar.	2
d)	$3m - 5,5m + 187,5$ ist die y-Koordinate der Geraden zum Parameter $m$ an der Stelle 3, $3m - 5,5m + 187,5 - 310$ ist daher die Abweichung des Punktes (3 / 310) von dieser Geraden in y-Richtung. Entsprechend sind $5m - 5,5m + 187,5 - 200$ , $6m - 5,5m + 187,5 - 150$ und $8m - 5,5m + 187,5 - 90$ die Abweichungen der Punkte (5 / 200), (6 / 150) und (8 / 90) von dieser Geraden in y-Richtung. (Auch eine Zeichnung, in der die Abweichungen in y-Richtung richtig zugeordnet sind, stellt hier eine mögliche Lösung dar.)	3
	Term (1) ist die Summe der Quadrate dieser Abweichungen.	1
e)	(1) $\dots = (-2,5m - 122,5)^2 + (-0,5m - 12,5)^2 + (0,5m + 37,5)^2 + (2,5m + 97,5)^2 = \dots$ $= 13m^2 + 1150m + 26075$	3
	Der Wert des Terms wird minimal für $m = -\frac{1150}{26} \approx -44,2$ . (Hier sind verschiedene Lösungswege, z. B. Scheitelpunkt der Parabel, Bestimmung der Extremstelle des Terms mit Hilfe der Ableitung, denkbar und möglich.)	3
	Was beim Vergleich der Ergebnisse als richtige Lösung anerkannt wird, hängt von der Zeichnung zu a) und der Richtigkeit der vorausgegangenen Bearbeitung ab. Hier sollten alle „vernünftigen“ Lösungen als richtig anerkannt werden (also auch das Erkennen von Fehlern in der Bearbeitung anhand des Vergleichs).	1

## 5. Aufgabe (Multiple-Choice-Aufgaben)

1.	$m = 2$	<i>richtig</i>
2.	$r = \sqrt{45}$ $r \geq 3$	<i>richtig</i> <i>richtig</i>
3.	Es gibt einen Berührungspunkt B, so dass für den y-Achsenabschnitt d gilt: $d = r$ Zu jeder reellen Zahl m gibt es eine Tangente t, die m als Steigung hat	<i>richtig</i> <i>richtig</i>
4.	$y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$ $2y + x = 15$	<i>richtig</i> <i>richtig</i>
5.	$x_S - x_B = y_B$ $x_S - y_B = \sqrt{r^2 - y_B^2}$ $x_S - x_B = \sqrt{r^2 - x_B^2}$	<i>richtig</i> <i>richtig</i> <i>richtig</i>

Zur Bepunktung:

Für jede Teilaufgabe gibt es maximal 7 Punkte. Ein „Fehler“ im Sinne der nachfolgenden Tabelle ist:

- jedes fehlende Kreuz
- jedes bei einer falschen Antwort stehende Kreuz.

Die Punkte für jede Teilaufgabe werden wie folgt ermittelt:

mehr als 3 Fehler oder nicht bearbeitet	0 Punkte
3 Fehler	1 Punkte
2 Fehler	2 Punkte
1 Fehler	4 Punkte
kein Fehler	7 Punkte

Insgesamt kann man für die 5 Teilaufgaben also maximal 35 Punkte erhalten. Die erreichte Gesamtpunktzahl muss dann durch Multiplikation mit dem Faktor 20/35 und anschließender Rundung an die anderen Alternativen (Geometrie- Statistik) angepasst werden (vgl. Auswertungsbogen).