

Aufgabe 3b ohne CAS

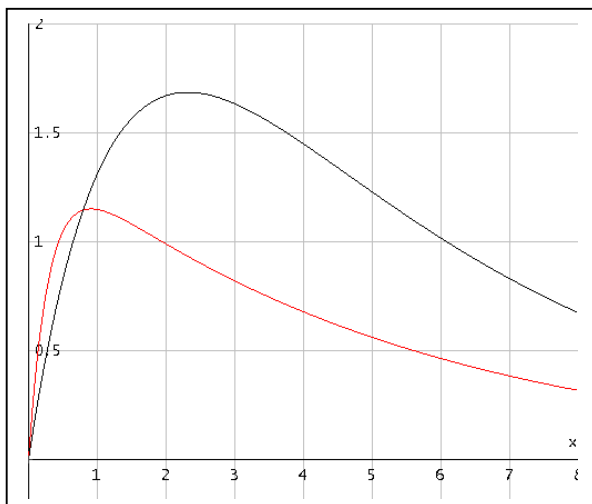
Aufputschmittel Koffein¹

Wenn jemand Drogen oder Aufputschmittel nimmt, vergeht eine gewisse Zeit, bis diese "so richtig anschlagen". Die Drogenkonzentration im Körper ist ein Maß für die Stärke des Rausches bzw. für die Beeinträchtigung der geistigen Funktionen.

Folgende Formel liefert eine Näherung für die Abhängigkeit der Drogenkonzentration von der Zeit t in Stunden: $k(t) = c \cdot (e^{-at} - e^{-bt})$. a, b, c sind positive Konstanten, die vom Wirkstoff, der Wirkstoffmenge und der Verabreichungsform abhängen. In der Literatur finden sich folgende Daten für die Wirkung von Koffein, verabreicht in zwei verschiedenen Formen: als Koffein-Tablette oder als "Kaffeezäpfchen"

Als Bezugsgröße für die Koffeinkonzentration im Körper wird das Blutplasma verwendet. Als Einheit wählt man mg Wirkstoff pro Liter Blutplasma und als Zeiteinheit die Stunde.

- (1) Bei der Verabreichung einer 50 mg **Koffein-Tablette** an einen Erwachsenen gilt für die Konstanten: $a = 0,19$; $b = 3,35$; $c = 1,45$.
- (2) Bei Verabreichung eines "**Kaffeezäpfchens**" mit 75 mg Koffein gilt entsprechend: $a = 0,22$; $b = 0,75$; $c = 3,97$



a) Stellen Sie die zugehörigen Funktionsterme auf und ordnen Sie die beiden Graphen den verschiedenen Arten der Koffeineinnahme zu. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Jemand möchte mit Hilfe einer Koffeintablette um 14 Uhr den Höhepunkt seiner Leistungsfähigkeit erreichen. Berechnen Sie, wann er die Tablette einnehmen sollte. Wie hoch ist dann die Konzentration?

¹ Entnommen der MUED-Broschüre: Sammlung Extremwertprobleme 2, Seite 21- Bezug über <http://www.mued.de>. Dort finden sich auch weitere Beispiele zur Wirkung von Drogen.

Erwartungshorizont zur Aufgabe 3b: "Aufputzmittel Koffein" – ohne CAS

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	TR	Punkte
Teil a) :			
<p>- Aufstellen der Funktionsterme: $k_1(t) = 1,45 \cdot (e^{-0,19t} - e^{-3,35t})$; $k_2(t) = 3,97 \cdot (e^{-0,22t} - e^{-0,75t})$</p> <p>- Begründete Zuordnung der Graphen, z.B. durch Vergleich von Funktionswerten an einer Stelle x oder andere Eigenschaften.</p>	<p>Schüler sollen Informationsquellen erschließen, Schüler sollen gegebenen Graphen Funktionsterme zuordnen</p>		6
Teil b) :			
<p>$k_1'(t) = 1,45 \cdot (-0,19 \cdot e^{-0,19t} + 3,35 \cdot e^{-3,35t})$</p> <p>$k_1'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{(3,35 - 0,19)t} = \frac{3,35}{0,19} \Leftrightarrow$</p> <p>$t \cdot (3,35 - 0,19) = \ln \frac{3,35}{0,19} \Leftrightarrow t \approx 0,91$</p> <p>Mittels Vorzeichenbetrachtungen Nachweis des Maximums; $k_1(0,91) \approx 1,2$</p> <p>Ca. 54 Minuten nach der Einnahme ist die Koffeinkonzentration mit ca. 1,2 mg Koffein pro Liter Blutplasma am höchsten, d.h. die Tablette sollte um 13.06 Uhr eingenommen werden.</p>	<p>Schüler sollen ein reales Problem strukturieren und Funktionen untersuchen (Extremwertuntersuchung)</p>	<p>Ermittlung des Maximums mittels Lösung einer Exponentialgleichung</p>	14
Gesamtpunktzahl Aufgabe 3:			20