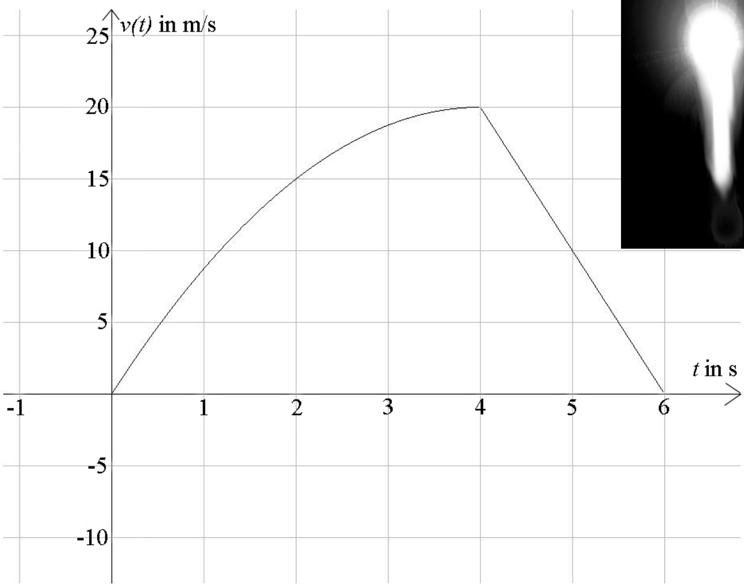
Aufgabe 2 mit CAS

Start einer Silvesterrakete

Eine Silvesterrakete wird senkrecht vom Erdboden in den Nachthimmel geschossen.

Der Treibsatz brennt in $4\,\mathrm{s}$ (Sekunden) ab, d.h. die Rakete wird in diesem Moment nicht mehr beschleunigt. Nachdem der Treibsatz ausgebrannt ist, nimmt die Geschwindigkeit der weiterhin senkrecht aufsteigenden Rakete innerhalb von $2\,\mathrm{s}$ linear auf $0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ im höchsten Punkt ab.



Der gesamte Geschwindigkeitsverlauf für den Aufstieg der Rakete ist im nebenstehenden Diagramm idealisiert dargestellt.

a) Bestimmen Sie anhand des Diagramms, wann die Rakete ihre maximale Geschwindigkeit und wann sie ihre maximale Flughöhe erreicht. Geben Sie begründet einen ungefähren Wert für die maximale Flughöhe an.

b) Ermitteln Sie Funktionsterme zur Beschreibung der Raketengeschwindigkeit für die beiden Zeitabschnitte $0\mathrm{s} \le t \le 4\mathrm{s}$ und $4\mathrm{s} \le t \le 6\mathrm{s}$.

c) Bestimmen Sie rechnerisch in welche maximale Höhe über dem Erdboden die Rakete aufsteigt.

d) Bestimmen Sie den Zeitpunkt zu dem die Rakete eine Höhe von $16\frac{2}{3}\,\mathrm{m}$ erreicht.

Erwartungshorizont zur Aufgabe 2 "Silvesterrakete" –mit CAS

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	CAS	Punkte
Teil a) :			
Die Raketengeschwindigkeit ist nach Abbrennen des Treibsatzes maximal, also nach $4\,\mathrm{s}$. Die größte Flughöhe erreicht die Rakete, wenn ihre Geschwindigkeit wieder auf 0 abgenommen hat, also nach $6\,\mathrm{s}$. Schätzwert für die maximale Flughöhe: $\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 20+10+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 20\right)\mathrm{m}=70\mathrm{m}$ als Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der ersten Achse.	Schülerinnen und Schüler interpretieren den Graphen und identifizieren den Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der ersten Achse als Wegstrecke.		4
Teil b):			
Für $0\mathrm{s}\le t\le 4\mathrm{s}$: Die Gleichung der Parabel mit dem Scheitelpunkt $(4\vert 20)$, die durch den Ursprung verläuft lautet: $v_1(t)=-1,25t^2+10t$ Für $4\mathrm{s}\le t\le 6\mathrm{s}$: Mit den Punkten $(4\vert 20)$ und $(6\vert 0)$ ergibt sich als lineare Funktion: $v_2(t)=-10t+60$	Anhand markanter Punkte des Graphen modellieren die Schülerinnen und Schüler eine quadratische Funktion für den ersten und eine lineare Funktion für den zweiten Zeitabschnitt.		6

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	CAS	Punkte
Teil c):			
Für $0\text{s} \le t \le 4\text{s}$: $s_1 = \int_0^4 \left(-1,25t^2 + 10t\right) dt = \left[-\frac{5}{12}t^3 + 5t^2\right]_0^4 = 53\frac{1}{3}$ Für $4\text{s} \le t \le 6\text{s}$: $s_2 = \int_4^6 \left(-10t + 60\right) dt = \left[-5t^2 + 60t\right]_4^6 = 20$ Insgesamt steigt die Rakete in eine Höhe von $s_{ges} = 53\frac{1}{3}\text{m} + 20\text{m} = 73\frac{1}{3}\text{m}$.	Schülerinnen und Schüler berechnen das bestimmte Integral für beide Zeitabschnitte.	Berechnung des bestimmten Integrals	4
Teil d):			
$\int_0^x \left(-1,25t^2 + 10t\right) dt = 16\frac{2}{3}$ $\Leftrightarrow -\frac{5}{12}x^3 + 5x^2 = 16\frac{2}{3}$ $\Leftrightarrow x = 2 \vee \left(x = 5 - 3\sqrt{5} \vee x = 5 + 3\sqrt{5}\right)$ Nach 2s erreicht die Rakete die Höhe von $16\frac{2}{3}\text{m}$. Die weiteren Lösungen liegen nicht im betrachteten Zeitabschnitt.	Schülerinnen und Schüler erkennen, dass der gesuchte Zeitpunkt im ersten Zeitabschnitt liegen muss, stellen den erforderlichen Ansatz auf, lösen die kubische Gleichung und schließen unzutreffende Lösungen aus.	Integration und Lösung einer kubischen Gleichung mittels CAS	4

Gesamt: 18 Punkte