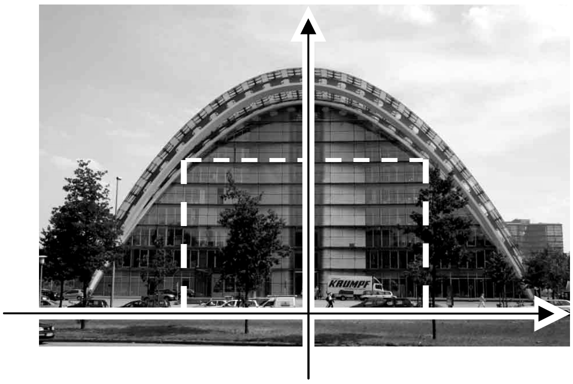
Aufgabe 3a ohne CAS

Berliner Bogen



Das Gebäude in den Abbildungen heißt „Berliner Bogen“ und steht in Hamburg. Ein Architekt in Shanghai möchte gerne das gewölbte Glasdach für einen Neubau kopieren. Die Dachkonstruktion soll ähnliche Maße wie das Original haben: Es soll eine Höhe von $36\,\mathrm{m}$ haben und unten doppelt so breit sein wie es hoch ist. Die Länge am Boden (Tiefe des Baus, ohne die überstehenden Teile des Dachs) soll $140\,\mathrm{m}$ betragen.

a) Erklären Sie, inwiefern die quadratische Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{36}x^2 + 36$ den Bogen modelliert.

b) Unter dem Glasdach soll ein quaderförmiges Bürogebäude eingebaut werden (siehe Skizze). Ermitteln Sie dessen Maße so, dass der Rauminhalt dieses Bürogebäudes maximal wird.
[Zur Kontrolle: Die Breite beträgt ungefähr $40\,\mathrm{m}$.]

c) Zwischen dem Glasdach und dem quaderförmigen Bürogebäude sollen im Erdgeschoss Pflanzen und Sitzgruppen aufgestellt werden. Auf dem Dach des Bürogebäudes ist eine Cafeteria geplant.
Bestimmen Sie, wie viel Raum (in m^3) insgesamt zwischen Glasdach und Gebäude dafür frei bleibt.

Erwartungshorizont zur Aufgabe 3a "Berliner Bogen" – ohne CAS

<table>
<tr><th>Skizzierung der Lösung</th><th>Anforderungsbeschreibung</th><th>TR</th><th>Punkte</th></tr>
<tr><td colspan="4">Teil a)</td></tr>
<tr><td>$f(x)=ax^2+b$, weil die Parabel symmetrisch zur y-Achse ist.
$f(0)=36$, da das Gebäude 36 m hoch ist.
$f(36)=0$, weil es doppelt so breit wie hoch ist.
$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{36}x^2+36$</td><td>Schülerinnen und Schüler formulieren aus den gegebenen Maßen Bedingungen an die Funktion und begründen damit den Funktionsterm oder sie ermitteln aus diesen Bedingungen die Koeffizienten.</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="4">Teil b)</td></tr>
<tr><td>Extremalbed.: $A=a\cdot b$ soll maximal werden.
Nebenbed.: $a=2x$, $b=f(x)$, $x\geq 0$
Zielfunktion: $A(x)=-\frac{1}{18}x^3+72x$
notwendige. Bed. für Extrema: $A'(x)=0$
$-\frac{1}{6}x^2+72=0 \Leftrightarrow x_E=20,7846$ (weil $x\geq 0$)
hinreichende Bed. für Extrema:
$A'(x)=0 \wedge A''(x)\neq 0$
$A''(x)=-\frac{1}{3}x;\quad A''(20,7846)<0 \Rightarrow$ Der Graph von A ist an der Stelle x_E rechtsgekrümmt, es liegt ein Hochpunkt vor.</td><td>Schülerinnen und Schüler mathematisieren die Situation: sie formulieren die Extremalbedingung, finden geeignete Nebenbedingungen und stellen daraus die Zielfunktion auf.

Schülerinnen und Schüler bestimmen die 1. Ableitung und berechnen deren Nullstellen als Kandidaten für Extremstellen.

Schülerinnen und Schüler bestimmen die 2. Ableitung, setzen die Nullstellen der 1. Ableitung in die 2. Ableitung ein und schließen daraus (begründet) auf einen Hochpunkt.</td><td>Rechenhilfe</td><td>9</td></tr>
</table>

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	TR	Punkte
$a = 41{,}569\text{ m}, b = 24\text{ m}, A(x_E) = 997{,}66\,\text{m}^2$ $V_B = 997{,}66\text{ m}^2 \cdot 140\,\text{m} = 139\,672{,}4\,\text{m}^3$	Durch Einsetzen in die Zielfunktion und in die Nebenbedingungen bestimmen Schülerinnen und Schüler die Maße des optimalen Rechtecks. Durch Multiplikation mit der Länge des Gebäudes berechnen sie das optimale Volumen.	Rechenhilfe	
Teil c)			
$2 \cdot \int_0^{36} f(x)dx = 2 \cdot \left[-\frac{1}{108}x^3 + 36x\right]_0^{36} = 1728$ Volumen unter dem Glasdach: $V_{GD} = 1728\,\text{m}^2 \cdot 140\,\text{m} = 241920\,\text{m}^3$ $V_{Diff} = V_{GD} - V_B = 241920\,\text{m}^3 - 139\,672{,}4\,\text{m}^3$ $= 102\,247{,}6\,\text{m}^3$	Schülerinnen und Schüler berechnen die Querschnittsfläche des Gebäudes als bestimmtes Integral. Schülerinnen und Schüler bestimmen das Volumen zwischen Glasdach und Bürogebäude.	exakte Bestimmung des Ergebnisses Rechenhilfe	6

Gesamt: 18 Punkte