Name: **Datum:**

Approximation durch Exponentialfunktionen - Grundwissen

Gegeben sei eine bivariate statistische Erhebung mit

- einer Grundgesamtheit mit dem Erhebungsumfang n,
- zwei quantitativen Merkmalen X und Y,
- der durch die Erhebung gewonnen Urliste mit den Messwertepaaren $(x_1 \,|\, y_1), (x_2 \,|\, y_2), ..., (x_n \,|\, y_n)$

  bei denen man vermutet oder sogar weiß, dass die Messwertepaare am besten durch eine <u>Exponentialfunktion</u> mit einem Term der Form $y(x) = c \cdot d^x$ approximiert werden.

Dann erhält man den Funktionsterm $y(x) = c \cdot d^x$ der Exponentialfunktion, genauer gesagt die konkreten Wert der Parameter c und d , indem man

- o von allen y-Werten $y_1, ..., y_n$ die (natürlichen) Logarithmen $\ln(y_1), ..., \ln(y_n)$ bildet (und dadurch die Urliste wegen $y = c \cdot d^x \Leftrightarrow \ln(y) = \ln(c \cdot d^x) = \ln(c) + x \cdot \ln(d) =: \tilde{a} \cdot x + \tilde{b}$ mit $\tilde{a} = \ln(d)$ und $\tilde{b} = \ln(c)$ „linearisiert“)
- o den Steigungsfaktor $\tilde{a}$ und den Ordinatenabschnitt $\tilde{b}$ der Regressionsgerade für die Wertepaare $(x_1 \,|\ln(y_1)), (x_2 \,|\ln(y_2)), ..., (x_n \,|\ln(y_n))$ bestimmt
- o die Potenzen zur Basis e des Steigungsfaktors und des Ordinatenabschnitts berechnet (und dadurch wegen $\tilde{a} = \ln(d) \Leftrightarrow d = e^{\tilde{a}}$ und $\tilde{b} = \ln(c) \Leftrightarrow c = e^{\tilde{b}}$ die gesuchten Werte der Parameter c und d erhält).

Beispiel: Gegeben ist die Urliste

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	0,4	0,6	0,8	1,1	1,6	2,2

Berechnen der (natürlichen) Logarithmen $\ln(y_1), ..., \ln(y_n)$ der y-Werte $y_1, ..., y_n$ ergibt

x_i	1	2	3	4	5	6
$\ln(y_i)$	-0,92	-0,51	-0,22	0,095	0,47	0,788

Berechnen des Steigungsfaktors und des Ordinatenabschnitts der Regressionsgerade ergibt $\tilde{a} = 0{,}33671$ und $\tilde{b} = -1{,}22788$. (Der Korrelationskoeffizient von $0{,}9992$ deutet auf eine sehr gute Korrelation der linearisierten Urliste hin, so dass der Ansatz für eine Exponentialfunktion nachträglich gerechtfertigt wird.)

Damit ergeben sich die gesuchten Werte der Parameter c und d zu $c = e^{\tilde{b}} = e^{-1{,}22788} = 0{,}29$ und $d = e^{\tilde{a}} = e^{0{,}33671} = 1{,}40$, der gesuchte Funktionsterm ergibt sich zu $y(x) = 0{,}29 \cdot 1{,}40^x$.