

## Approximation durch Potenzfunktionen mit negativem Exponenten - Grundwissen



Gegeben sei eine bivariate statistische Erhebung mit

- einer Grundgesamtheit mit dem Erhebungsumfang  $n$ ,
- zwei quantitativen Merkmalen  $X$  und  $Y$ ,
- der durch die Erhebung gewonnenen Urliste mit den Messwertepaaren  $(x_1 | y_1), (x_2 | y_2), \dots, (x_n | y_n)$

bei denen man vermutet oder sogar weiß, dass die Messwertepaare am besten durch eine Potenzfunktion mit negativem Exponenten mit einem Term der Form  $y(x) = c \cdot x^d$  approximiert werden.

Dann erhält man den Funktionsterm  $y(x) = c \cdot x^d$  der Potenzfunktion mit negativem Exponenten, genauer gesagt die konkreten Wert der Parameter  $c$  und  $d$ , indem man

- o von allen  $x$ -Werten  $x_1, \dots, x_n$  die (natürlichen) Logarithmen  $\ln(x_1), \dots, \ln(x_n)$  und von allen  $y$ -Werten  $y_1, \dots, y_n$  die (natürlichen) Logarithmen  $\ln(y_1), \dots, \ln(y_n)$  bildet (und dadurch die Urliste wegen  $y = c \cdot x^d \Leftrightarrow \ln(y) = \ln(c \cdot x^d) = \ln(c) + d \cdot \ln(x) =: \tilde{a} \cdot \ln(x) + \tilde{b}$  mit  $\tilde{a} = d$  und  $\tilde{b} = \ln(c)$  „linearisiert“)
- o den Steigungsfaktor  $\tilde{a}$  und den Ordinatenabschnitt  $\tilde{b}$  der Regressionsgerade für die Wertepaare  $(\ln(x_1) | \ln(y_1)), (\ln(x_2) | \ln(y_2)), \dots, (\ln(x_n) | \ln(y_n))$  bestimmt
- o die Potenz zur Basis  $e$  nur des Ordinatenabschnitts berechnet (und dadurch wegen  $\tilde{a} = d$  und  $\tilde{b} = \ln(c) \Leftrightarrow c = e^{\tilde{b}}$  die gesuchten Werte der Parameter  $c$  und  $d$  erhält).

**Beispiel:** Gegeben ist die Urliste

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$y_i$	7,7	1,9	1	0,6	0,4	0,3

Berechnen der (natürlichen) Logarithmen  $\ln(x_1), \dots, \ln(x_n)$  der  $x$ -Werte  $x_1, \dots, x_n$  bzw.  $\ln(y_1), \dots, \ln(y_n)$  der  $y$ -Werte  $y_1, \dots, y_n$  ergibt

$\ln(x_i)$	0	0,693	1,099	1,386	1,609	1,792
$\ln(y_i)$	2,041	0,642	0	-0,51	-0,92	-1,2

Berechnen des Steigungsfaktors und des Ordinatenabschnitts der Regressionsgerade ergibt  $\tilde{a} = -1,8001$  und  $\tilde{b} = 1,9826$ . (Der Korrelationskoeffizient von 0,9990 deutet auf eine sehr gute Korrelation der linearisierten Urliste hin, so dass der Ansatz für eine Potenzfunktion mit negativem Exponenten nachträglich gerechtfertigt wird.)

Damit ergeben sich die gesuchten Werte der Parameter  $c$  und  $d$  zu  $c = e^{\tilde{b}} = e^{1,98261} = 7,26$  und  $d = \tilde{a} = -1,80$ , der gesuchte Funktionsterm ergibt sich zu  $y(x) = 7,26 \cdot x^{-1,80}$ .