Name: **Datum:**

Approximation durch Potenzfunktionen mit positivem Exponenten - Grundwissen

Gegeben sei eine bivariate statistische Erhebung mit

- einer Grundgesamtheit mit dem Erhebungsumfang n,
- zwei quantitativen Merkmalen X und Y,
- der durch die Erhebung gewonnen Urliste mit den Messwertepaaren $(x_1\,|\,y_1), (x_2\,|\,y_2), \ldots, (x_n\,|\,y_n)$

  bei denen man vermutet oder sogar weiß, dass die Messwertepaare am besten durch eine <u>Potenzfunktion mit positivem Exponenten</u> mit einem Term der Form $y(x) = c \cdot x^d$ approximiert werden.

Dann erhält man den Funktionsterm $y(x) = c \cdot x^d$ der Potenzfunktion mit positivem Exponenten, genauer gesagt die konkreten Wert der Parameter c und d , indem man

- o von allen x-Werten $x_1, \ldots, x_n$ die (natürlichen) Logarithmen $\ln(x_1), \ldots, \ln(x_n)$ <u>und</u> von allen y-Werten $y_1, \ldots, y_n$ die (natürlichen) Logarithmen $\ln(y_1), \ldots, \ln(y_n)$ bildet (und dadurch die Urliste wegen $y = c \cdot x^d \Leftrightarrow \ln(y) = \ln(c \cdot x^d) = \ln(c) + d \cdot \ln(x) =: \tilde{a} \cdot \ln(x) + \tilde{b}$ mit $\tilde{a} = d$ und $\tilde{b} = \ln(c)$ „linearisiert")
- o den Steigungsfaktor $\tilde{a}$ und den Ordinatenabschnitt $\tilde{b}$ der Regressionsgerade für die Wertepaare $(\ln(x_1)\,|\ln(y_1)), (\ln(x_2)\,|\ln(y_2)), \ldots, (\ln(x_n)\,|\ln(y_n))$ bestimmt
- o die Potenz zur Basis e <u>nur</u> des Ordinatenabschnitts berechnet (und dadurch wegen $\tilde{a} = d$ und $\tilde{b} = \ln(c) \Leftrightarrow c = e^{\tilde{b}}$ die gesuchten Werte der Parameter c und d erhält).

Beispiel: Gegeben ist die Urliste

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	0,3	0,9	1,7	2,8	4,0	5,2

Berechnen der (natürlichen) Logarithmen $\ln(x_1), \ldots, \ln(x_n)$ der x-Werte $x_1, \ldots, x_n$ bzw. $\ln(y_1), \ldots, \ln(y_n)$ der y-Werte $y_1, \ldots, y_n$ ergibt

$\ln(x_i)$	0	0,693	1,099	1,386	1,609	1,792
$\ln(y_i)$	-1,2	-0,11	0,531	1,03	1,386	1,649

Berechnen des Steigungsfaktors und des Ordinatenabschnitts der Regressionsgerade ergibt $\tilde{a} = 1{,}60299$ und $\tilde{b} = -1{,}2101($. (Der Korrelationskoeffizient von $0{,}9999$ deutet auf eine sehr gute Korrelation der linearisierten Urliste hin, so dass der Ansatz für eine Potenzfunktion mit positivem Exponenten nachträglich gerechtfertigt wird.)

Damit ergeben sich die gesuchten Werte der Parameter c und d zu $c = e^{\tilde{b}} = e^{-1{,}21010} = 0{,}30$ und $d = \tilde{a} = 1{,}60$, der gesuchte Funktionsterm ergibt sich zu $y(x) = 0{,}30 \cdot x^{1{,}60}$.

© 2006 Thomas Unkelbach