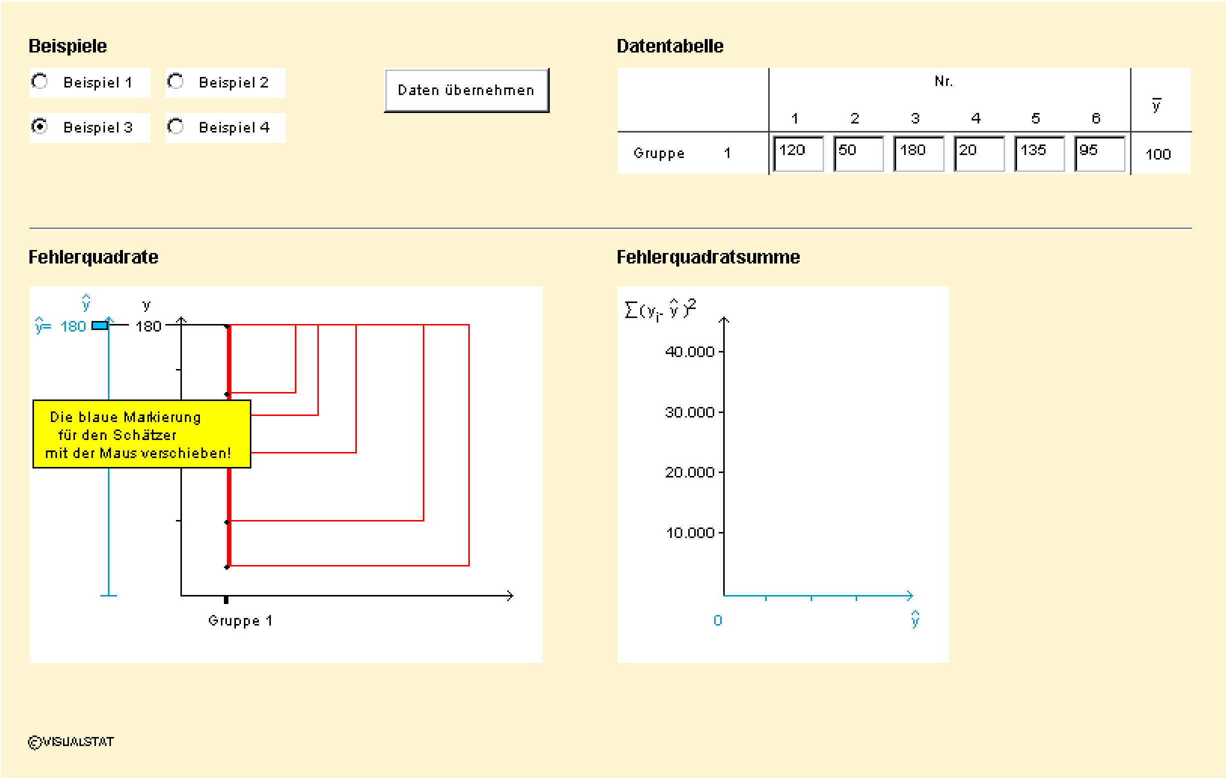
Name: **Datum:**

Minimaleigenschaft des Arithmetischen Mittels - Arbeitsblatt

Der Link http://www.psychologie.uni-freiburg.de/visualstat/4_selbstaendig/41_am/am_applet.htm führt zu folgendem JAVA-Applet:



Am linken oberen Bildrand sind 4 **Beispiele** wählbar, wählen Sie bitte Beispiel 3 aus. In der **Datentabelle** finden Sie eine Datenmenge mit 6 Messwerten $\{y_1; \dots ; y_6\}$ und das Arithmetische Mittel $\bar{y}$ dieser Datenmenge. In der Graphik **Fehlerquadrate** sind die 6 Messwerte als kleine schwarze Punkte auf der roten Parallelen zur Ordinate aufgetragen. Mit dem blauen Schieberegler können Sie einen beliebigen Mittelwert $\hat{y}$ der Datenmenge auswählen bzw. diesen dynamisch verändern. Jedes einzelne der 6 sich dabei verändernden roten Quadrate stellt über den Flächeninhalt die Quadratische Abweichung $(y_i - \hat{y})^2$ des entsprechenden Messwertes y_i zum gewählten Mittelwert $\hat{y}$ dar. In der Graphik **Fehlerquadratsumme** wird die Summe $(y_1 - \hat{y})^2 + \dots + (y_6 - \hat{y})^2 = \sum (y_i - \hat{y})^2$ aller 6 Fehlerquadrate in Abhängigkeit vom gewählten Mittelwert $\hat{y}$ aufgetragen.

☞ Arbeitsaufträge:

1. Berechnen Sie den Median $\tilde{y}$, das Arithmetische Mittel $\bar{y}$, das sogenannte Geometrische Mittel $g = \sqrt[6]{y_1 \cdot \dots \cdot y_6}$ und das sogenannte Harmonische Mittel $h = \dfrac{6}{\frac{1}{y_1} + \dots + \frac{1}{y_6}}$ der Datenmenge. (Kontrollergebnisse: $\tilde{y} \approx 108$; $\bar{y} = 100$; $g \approx 81$; $h \approx 59$)

2. Berechnen Sie für diese 4 Mittelwerte jeweils z.B. mit einer Tabellenkalkulation die Summe der 6 Quadratischen Abweichungen der Datenmenge von diesem Mittelwert, z.B. für den Median $\tilde{y}$ die Summe $(y_1 - \tilde{y})^2 + \dots + (y_6 - \tilde{y})^2$. (Kontrollergebnisse: 17334; 16950; 19116; 27036)

3. Wählen Sie in der Grafik **Fehlerquadrate** für den Mittelwert $\hat{y}$ die 4 in Aufgabe **1.** berechneten Mittelwerte und beobachten Sie jeweils den Flächeninhalt der 6 roten Quadrate und überprüfen in der Grafik **Fehlerquadratsumme** die von Ihnen berechnete Summe der Quadratischen Abweichungen.

4. Variieren Sie in der Grafik **Fehlerquadrate** den Mittelwert $\hat{y}$, beobachten Sie den roten Graphen in der Grafik **Fehlerquadratsumme** und nennen Sie den vermutlichen Typ des roten Graphen.

5. Erläutern Sie anhand der Grafik **Fehlerquadratsumme** die Bedeutung, die scheinbar die Wahl des Arithmetischen Mittels $\bar{y}$ als Mittelwert $\hat{y}$ für die Summen der Quadratischen Abweichungen vom Mittelwert hat.

Wir wollen nun die Vermutung aus Aufgabe **5.** für dieses Beispiel exakt beweisen.

6. Die Summe der Quadratischen Abweichungen, wir bezeichnen Sie kurz mit S, der gegebenen Datenmenge $\{y_1; ...; y_6\}$ von einem beliebigen Mittelwert $\hat{y}$ ist wie bereits gesagt $S(\hat{y}) = (y_1 - \hat{y})^2 + ... + (y_6 - \hat{y})^2 = (120 - \hat{y})^2 + ... + (95 - \hat{y})^2$. Quadrieren Sie die Klammern aus und fassen Sie den Term so weit wie möglich zusammen. (Kontrollergebnis: $S(\hat{y}) = 6 \cdot \hat{y}^2 - 1200 \cdot \hat{y} + 76950$)

7. Nennen Sie den Typ des Terms $S(\hat{y})$ und den Typ des zugehörigen Graphen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus Aufgabe **4.** .

8. Bestimmen Sie den kleinsten Wert, den der Term $S(\hat{y})$ überhaupt annehmen kann und geben Sie auch an, für welches Argument $\hat{y}$ der Term diesen kleinsten Wert annimmt. **Tipp:** Überführen Sie den Term $S(\hat{y})$ in die Scheitelpunktform. (Kontrollergebnisse: 16950 und 100)

9. Interpretieren Sie die beiden in Aufgabe **8.** berechneten Werte im Sinne der Fragestellung bzw. Ihrer Antwort aus Aufgabe **5.** .

Wir wollen schließlich das Ergebnis aus Aufgabe **9.** verallgemeinern. Wir gehen dazu von einer beliebigen Datenmenge mit n Messwerten $\{y_1; y_2; ...; y_n\}$ aus.

10. Die Summe der Quadratischen Abweichungen, wir bezeichnen Sie wieder kurz mit S, der gegebenen Datenmenge $\{y_1; y_2; ...; y_n\}$ von einem beliebigen Mittelwert $\hat{y}$ ist nun allgemein $S(\hat{y}) = (y_1 - \hat{y})^2 + (y_2 - \hat{y})^2 + ... + (y_n - \hat{y})^2$. Quadrieren Sie wieder die Klammern aus und fassen Sie den Term so weit wie möglich zusammen. Benutzen Sie für sich wiederholende Teile die drei Punkte „...“.

11. Nennen Sie den Typ des Terms $S(\hat{y})$ und den Typ des zugehörigen Graphen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit denen aus den Aufgaben **4.** und **7.**.

12. Überführen Sie den Term $S(\hat{y})$ in die Scheitelpunktform und geben Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes an. (Kontrollergebnis: $(\bar{y} \mid (y_1{}^2 + ... + y_n{}^2) - n \cdot \bar{y}^2)$)

Weitere komplizierte Rechnungen ergeben, dass $(y_1{}^2 + ... + y_n{}^2) - n \cdot \bar{y}^2 = n \cdot V_y$, so dass der Scheitelpunkt die Koordinaten $(\bar{y} \mid n \cdot V_y)$ hat.

13. Interpretieren Sie dieses Ergebnis in Form einer allgemeinen Regel.

