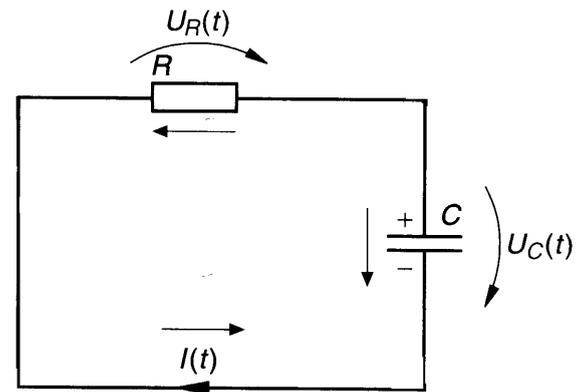


Stationenlernen Kondensator T4 - Theorie der Entladung eines Kondensators

Die in einem physikalischen Experiment gewonnen Messwerte können nur dann sinnvoll ausgewertet werden, wenn der Typ der mathematischen Funktion bekannt ist, durch die die Abhängigkeiten zwischen den relevanten Größen beschrieben werden kann. Aus prinzipiellen Gründen kann der Typ dieser Funktion aber niemals experimentell, sondern nur durch theoretische Überlegungen bestimmt werden. Diese werden für die Entladung eines Kondensators im Folgenden durchgeführt.

Ein mit der Ladung Q_0 aufgeladener Kondensator mit der Kapazität C wird über einen Widerstand R entladen.

Beachtet man, dass die Spannung $U_C(t)$ über dem Kondensator positiv und die Spannung $U_R(t)$ über dem Widerstand wegen der gegenüber dem Aufladevorgang entgegengesetzten Stromrichtung jetzt negativ (!) gerechnet wird, gilt nach dem 2. KIRCHHOFFSchen Gesetz (Maschenregel) zu jedem Zeitpunkt t des Aufladevorgangs die Gleichung



Mit $U_R(t) = R \cdot I(t)$ (OHMsches Gesetz; $I(t)$: Stromstärke im Stromkreis während des Entladevorgangs) und $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$ (Kondensatorgleichung; $Q(t)$: Ladung auf dem Kondensator während des Entladevorgangs) ergibt sich

$$U_R(t) + U_C(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow R \cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0$$

Mit $I(t) = \dot{Q}(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ ergibt sich

$$\Leftrightarrow R \cdot \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad | : R$$

$$\Leftrightarrow \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} Q(t) = 0 \quad (*)$$

Dies ist die **homogene Differentialgleichung 1. Ordnung für die Ladung $Q(t)$ auf dem Kondensator während des Entladevorgangs**. Die Größe $\tau = R \cdot C$ heißt **Zeitkonstante**.

Arbeitsaufträge:

1. Ladung auf dem Kondensator

- Zeige durch Ableiten und Einsetzen, dass die Funktion $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$ die Differentialgleichung (*) erfüllt und damit den zeitlichen Verlauf der Ladung auf dem Kondensator während des Entladevorgangs beschreibt.
- Erstelle mit einem Funktionenplotter den Graph der Funktion $Q(t)$ für $R = 100\text{k}\Omega = 1,0 \cdot 10^5 \Omega$, $C = 47\mu\text{F} = 4,7 \cdot 10^{-5} \text{F}$ und $Q_0 = 4,7 \cdot 10^{-4} \text{C}$.

- c) Zeige, dass die Anfangsbedingung $Q(t = 0) = Q_0$ durch die Funktion ebenfalls erfüllt ist.
- d) Berechne den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t)$ und erkläre das Ergebnis physikalisch.
- e) Zeige, dass sich nach der Zeit $t = \tau$ nur noch ca. 37% der ursprünglichen Ladung Q_0 auf dem Kondensator befinden.

2. Spannung über dem Kondensator

- a) Zeige mit Hilfe des Zusammenhangs $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$, dass die Funktion $U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$ mit $U_0 = \frac{Q_0}{C}$ den zeitlichen Verlauf der Spannung über dem Kondensator während des Entladevorgangs beschreibt.
- b) Erstelle mit einem Funktionenplotter den Graph der Funktion $U_C(t)$ für $R = 100\text{k}\Omega = 1,0 \cdot 10^5 \Omega$, $C = 47\mu\text{F} = 4,7 \cdot 10^{-5} \text{F}$ und $Q_0 = 4,7 \cdot 10^{-4} \text{C}$.
- c) Berechne die Spannung $U_C(t = 0)$ über dem Kondensator zum Zeitpunkt $t = 0$.
- d) Berechne den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow +\infty} U_C(t)$ und erkläre das Ergebnis physikalisch.
- e) Zeige, dass nach der Zeit $t = \tau$ die Spannung über dem Kondensator nur noch ca. 37% der ursprünglichen Spannung U_0 beträgt.

3. Stromstärke in der Schaltung

- a) Zeige mit Hilfe des Zusammenhangs $I(t) = \dot{Q}(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$, dass die Funktion $I(t) = -I_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$ mit $I_0 = \frac{Q_0}{RC}$ den zeitlichen Verlauf der Stromstärke in der Schaltung während des Entladevorgangs beschreibt.
- b) Erstelle mit einem Funktionenplotter den Graph der Funktion $I(t)$ für $R = 100\text{k}\Omega = 1,0 \cdot 10^5 \Omega$, $C = 47\mu\text{F} = 4,7 \cdot 10^{-5} \text{F}$ und $Q_0 = 4,7 \cdot 10^{-4} \text{C}$.
- c) Berechne die Stromstärke $I(t = 0)$ in der Schaltung zum Zeitpunkt $t = 0$.
- d) Berechne den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t)$ und erkläre das Ergebnis physikalisch.
- e) Zeige, dass nach der Zeit $t = \tau$ die Stromstärke in der Schaltung nur noch ca. 37% der ursprünglichen Stromstärke I_0 beträgt.

4. Spannung über dem Widerstand

- a) Zeige mit Hilfe des Zusammenhangs $U_R(t) = R \cdot I(t)$, dass die Funktion $U_R(t) = -U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$ mit $U_0 = \frac{Q_0}{C}$ den zeitlichen Verlauf der Spannung über dem Widerstand während des Entladevorgangs beschreibt.
- b) Erstelle mit einem Funktionenplotter den Graph der Funktion $U_R(t)$ für $R = 100\text{k}\Omega = 1,0 \cdot 10^5 \Omega$, $C = 47\mu\text{F} = 4,7 \cdot 10^{-5} \text{F}$ und $Q_0 = 4,7 \cdot 10^{-4} \text{C}$.
- c) Berechne die Spannung $U_R(t = 0)$ über dem Widerstand zum Zeitpunkt $t = 0$.
- d) Berechne den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow +\infty} U_R(t)$ und erkläre das Ergebnis physikalisch.
- e) Zeige, dass nach der Zeit $t = \tau$ die Spannung über dem Widerstand nur noch ca. 37% der ursprünglichen Spannung U_0 beträgt.